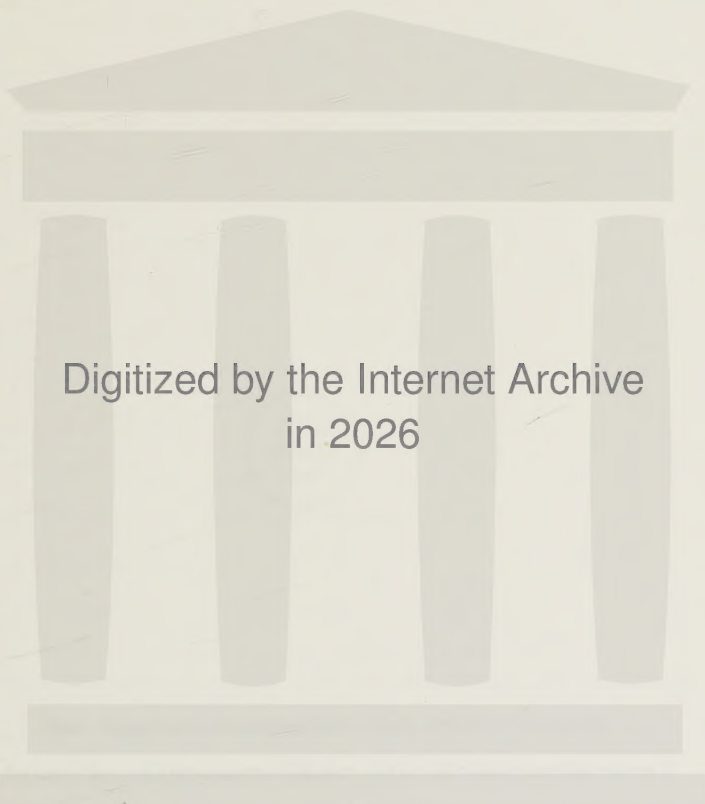


**STUDIUM EINES MIKROSKOPISCHEN MODELLS
DER NUKLEAREN PIONABSORPTION**

Werner Schneider

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548420_0038

Gesamtherstellung

Blasaditsch GmbH • 89 Augsburg 17 • Theodor-Heuß-Platz 3 • Telefon (0821) 51 85 63

STUDIUM EINES MIKROSKOPISCHEN MODELLS
DER NUKLEAREN PIONABSORPTION



Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Werner Schneider

aus Forchheim



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 20. 7. 1977

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. E. Schweizer
Erstberichterstatter:	Professor Dr. M. G. Huber
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. H. Ruder

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Konventionelle Beschreibung pionischer Atome durch das optische Modell	8
3.	Einführen eines mikroskopischen Modells und die Berechnung totaler und partieller Übergangswahrscheinlichkeiten	12
3.1	Formalismus für die 2N-Emission	18
3.1.1	Phasenraum für die 2N-Emission	20
3.1.2	Pion-Nukleon-Operator	22
3.1.3	Wellenfunktionen gebundener und freier Nukleonen	23
3.1.4	Effektiver Pion-Nukleon-Operator	28
3.1.5	Matrizelement M_{fi}	31
3.1.6	Totale Übergangswahrscheinlichkeit	36
3.1.7	Übergangswahrscheinlichkeiten für (pn)- und (nn)-Emission	38
3.1.8	Energie- und Winkelverteilungen für 2N-Emission	39
3.2	Formalismus für die 1N-Emission	41
3.2.1	Phasenraum für die 1N-Emission	42
3.2.2	Operatoren und Korrelationsfunktion	42

3.2.3	Wellenfunktionen gebundener und freier Nukleonen	43
3.2.4	Matrixelement M_{fi}	44
3.2.5	Übergangswahrscheinlichkeit	46
4.	Ergebnisse	49
4.1	Beschreibung inklusiver Reaktionen	51
4.1.1	Ergebnisse mit wasserstoffähnlichen Pion- wellenfunktionen	53
4.1.2	Ergebnisse mit distortierten Pionwellen- funktionen	65
4.2	Beschreibung exklusiver Reaktionen	80
5.	Folgerungen und Erweiterungen des vor- liegenden Modells	98
6.	Zusammenfassung	104
	Literaturverzeichnis	107
	Anhänge	109
A	Antisymmetrisierte Schalenmodell-Wellen- funktionen	109
B	Berechnung der reduzierten Matrixelemente für Isospin und Drehimpulse	121
C	Zurückführen der reduzierten Matrixelemente für 1N-Emission auf die reduzierten Matrix- elemente für 2N-Emission	132

1. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der mikroskopischen Beschreibung der Absorption gebundener Pionen.

Pionabsorptionsvorgänge finden die Aufmerksamkeit des Kernphysikers, weil sie interessante Einblicke in die Struktur des Kernes gewähren. Ein (ruhesendes) Pion deponiert bei seiner Absorption eine Energie von etwa 140 MeV im Kern, ohne daß es auch Impuls mitbringt. Dieser Energiebetrag reicht im Prinzip aus, leichte Kerne in lauter freie Nukleonen aufzulösen. In der Praxis sieht es so aus, daß unmittelbar nach der Absorption einzelne Nukleonen oder ganze Nukleonencluster aus dem Kernverband geschleudert werden. Der Restkern bleibt dann mehr oder weniger hoch angeregt zurück. Dieser Restkern emittiert eventuell weitere Teilchen und/oder Photonen, bis die Anregungsenergie verbraucht ist. Es stellen sich in diesem Zusammenhang die Fragen, in welche Endzustände das System zerfällt und wie stark ein spezieller Endzustand populiert wird.

Neben diesem kinematischen Grund besteht ein formal-theoretisches Interesse an der Beschreibung dieses Problems: beim Pion-Kern-System handelt es sich um ein

spezielles Vielkörperproblem, bei dem ein (fast reelles) Pion durch den Kern propagiert. Es interessiert insbesondere, mit welchen Näherungen man eine gute Beschreibung des Pion-Kern-Systems bekommt.

In den vergangenen Jahren wurde die Absorption gestoppter Pionen an Kernen intensiv im Rahmen der verfügbaren Pionenstrahlen und Experimentiereinrichtungen untersucht. Während nur relativ wenige Informationen über die nach der Absorption stattfindenden Prozesse zur Verfügung stehen, sind die Eigenschaften pionischer Atome sorgfältig und systematisch vermessen worden (siehe dazu den zusammenfassenden Bericht von Backenstoß (Back 70)).

Die Interpretation dieser Daten geschieht bis heute fast ausschließlich mit Hilfe eines phänomenologischen optischen Potentials, in dem die Pion-Kern_Wechselwirkung pauschal berücksichtigt wird (Kre 69, Blum 70, Tau 71, Tau 74). Aus dem Vergleich der erhaltenen komplexen Energien mit den experimentell beobachteten Größen zieht man Rückschlüsse auf die Bedeutung der einzelnen Terme eines solchen Potentials. Wir gehen in Kap. 2 kurz darauf ein (für einen Überblick siehe dazu Hüf 75).

Gelegentlich werden auch mikroskopische Ansätze zur Be-

schreibung der Breiten pionischer Atome versucht. Dazu muß man ein Modell für den Absorptionsmechanismus einführen. Auf Grund der kinematischen Verhältnisse bei der Absorption sollten in einem Modell für die Absorption mindestens zwei Nukleonen beteiligt sein. Da im reinen Schalenmodell des Kerns sich die Nukleonen völlig unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Potential bewegen, muß man also zusätzlich eine Mehr-Teilchen-Wechselwirkung zwischen den Nukleonen einführen, um die Absorption zu ermöglichen. Die einzelnen Modelle unterscheiden sich durch die unterschiedliche Behandlung dieser Mehr-Teilchen-Wechselwirkung oder Korrelation. Ein Teil der Arbeiten, die sich mit diesem Thema beschäftigen, benutzt dazu z.B. den "Rescattering"-Mechanismus, bei dem das zu absorbierende Pion diese Wechselwirkung vermittelt, indem es erst an einem Nukleon gestreut und dann am zweiten Nukleon endgültig absorbiert wird (Hel 74, und Ref. darin). In einem anderen Teil der Arbeiten wird eine Korrelationsfunktion zwischen den Nukleonen zunächst phänomenologisch eingeführt (Chu 70, und Ref. darin). Dabei geht man davon aus, daß diese Korrelationen durch die Kernkräfte, d.h. durch den Austausch virtueller Mesonen, bedingt sind. Dieser Weg wird auch in dieser Arbeit beschritten.

Es wird ein mikroskopisches, rechenbares Modell aufgestellt, das die (vermutlich) wesentlichen Reaktionsmechanismen enthält, und mit dem quantitative Aussagen über den Einfluß von Kernstruktureigenschaften und Reaktionsmechanismen auf meßbare Größen diskutiert werden. Das Modell soll an den wichtigsten vorliegenden Daten getestet werden, um einen Überblick zu bekommen, wie realistisch die Vorstellungen sind und welche Werte die Modellparameter annehmen sollten.

Beim gegenwärtigen Stand der experimentellen Information können die Modellannahmen natürlich nur sehr grob sein; in diesem Sinne handelt es sich hier um einen Versuch, die mit der Pionabsorption verbundenen Reaktionen einheitlich und mikroskopisch zu beschreiben, mit dem Ziel, die relevanten Mechanismen herauszufinden.

Wir stellen dazu in Kap. 3 den Formalismus bereit, der es gestattet, sowohl Ein-Nukleon-, als auch Zwei-Nukleonen-Emissionsprozesse zu beschreiben.

Aber angesichts der Annahmen, die notwendigerweise in solch ein mikroskopisches Modell eingehen, erscheint es sinnvoll, diese aufwendigen Rechnungen nicht allein auf

Breiten und Energieverschiebungen ("inklusive" Reaktionen) anzuwenden, sondern auf Größen, die wesentlich mehr detaillierte Informationen enthalten und deshalb durch das konventionelle optisch Modell nicht beschrieben werden können ("exklusive" Reaktionen).

In Kap. 4 diskutieren wir diese Reaktionen. Wir vergleichen die Ergebnisse mit den wichtigsten experimentellen Daten. Allerdings reichen die bisher existierenden Daten noch nicht hin, die Modellvorschläge und die benötigten Modellparameter soweit einzuschränken, daß eindeutige Aussagen über unsere Zielvorstellung, nämlich die relevanten Mechanismen der Pionabsorption anzugeben, gemacht werden können.

Ein Ausblick auf mögliche Verfeinerungen und Erweiterungen sowohl des Modells als auch der Experimente beschließt die Arbeit (Kap. 5).

Abschließend noch eine Bemerkung zur Zielsetzung der vorliegenden Arbeit. Gegenwärtig vollzieht sich eine bemerkenswerte Veränderung der experimentellen Möglichkeiten: mit der Inbetriebnahme der Mesonenfabriken wird es möglich sein, auch die bei der Absorption von Pionen entstehenden Endzustände - zumindest in einigen Fällen - vollständig und syste-

matisch, und mit großer Konfidenz auszumessen.

So ist es in den vergangenen Monaten bereits gelungen, z.B. die bei der $^{14}\text{N}(\pi^-, nn)^{12}\text{C}^*$ -Reaktion freiwerdenden Neutronen in einem beschränkten Winkelbereich derart zu spektroskopieren, daß man die Anregung spezieller gebundener Endzustände des ^{12}C -Restkerns untersuchen kann (Bass 76).

Solche Reaktionen enthalten natürlich wichtige Zusatzinformationen, die in den bisher üblichen Atomdaten (Breiten, Niveauverschiebungen) nicht enthalten sein können. Es ist offenkundig, daß solche detaillierten Reaktionen mit dem konventionellen optischen Modell der Pion-Kernwechselwirkung nicht beschrieben werden können und daß man zu einer mikroskopischen Behandlung der nuklearen Pion-Absorption übergehen muß.

In diesem Sinn soll hier -in Fortführung einer früheren Arbeit (Chu 70)- versucht werden, ein mikroskopisches Modell der Pionabsorption zu formulieren. Dieses geht aus zum einen von den bekannten und einigermaßen gesicherten Kernmodellen der Niederenergiekernphysik, zum anderen von den Modellannahmen zur Pion-Nukleon-Wechselwirkung. In Anbetracht der auftretenden Schwierigkeiten und Unsicherheiten - etwa was die Struktur der Kerne bei kleinen Abständen, oder den genauen Reaktionsmechanismus betrifft- kann die vorliegende Arbeit nur ein Versuch

sein in Richtung auf eine in sich konsistente Behandlung des Problems.

Dabei kommt es uns allerdings darauf an, ein einigermaßen "realistisches" Modell zu formulieren, das von physikalischen Annahmen ausgehend eine befriedigende Wiedergabe der vorliegenden inklusiven Daten erlaubt. Insbesondere sollten die Größenordnungen der Lebensdauern der gebundenen Pionen korrekt wiedergegeben werden.

Daneben aber ist es unser Anliegen, die notwendigen Methoden zur konkreten und vollständigen Beschreibung pion-induzierter Kernreaktionen auszuarbeiten und anzuwenden. Dabei soll diese Arbeit einen Beitrag leisten zur Analyse vor allem solcher exklusiver Reaktionen - wie etwa der erwähnten (π^- , $\pi\pi$) oder den (π^- , n) und (π^- , p)-Reaktionen -, die für unser Verständnis der Pion-Kern-Wechselwirkung besonders wichtig sind, und die in absehbarer Zeit einer experimentellen Untersuchung zugänglich sein werden.

2. Konventionelle Beschreibung pionischer Atome durch das optische Modell

Die übliche theoretische Wiedergabe der Niveau-Ver-schiebung ΔE und der Breite Γ pionischer Atome erfolgt mit Hilfe eines optischen Potentials für die Pion-Kern-Wechselwirkung. Dabei kommt neben einem lokalen Ansatz (Blum 70) hauptsächlich das nichtlokale Potential von Ericson - Ericson (Eri 66) zur Anwendung.

Es hat die folgende Form:

$$\frac{-2m_N V}{4\pi} = p_1 b_0 \rho(\vec{r}) + p_1 b_1 [\rho_n(\vec{r}) - \rho_p(\vec{r})] + p_2 B_0 \rho^2(\vec{r}) \\ + \vec{\nabla} \frac{q(\vec{r})}{1 + 4\pi/3 q(\vec{r})} + O(1/A). \quad (2.1)$$

Dabei gilt:

$$q(\vec{r}) = p_1^{-1} c_0 \rho(\vec{r}) + p_1^{-1} c_1 [\rho_n(\vec{r}) - \rho_p(\vec{r})] + p_2^{-1} c_2 \rho^2(\vec{r}), \\ \rho(\vec{r}) = \rho_n(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}), \\ p_1 = 1 + m_\pi / m_N, \\ p_2 = 1 + m_\pi / 2 m_N. \quad (2.2)$$

Die reellen Konstanten b , c sind die jeweiligen π -N-Streulängen, die aus den elementaren π -N-

Streuprozessen approximativ bekannt sind. Die komplexen Konstanten B und C werden aus $2N \Rightarrow \pi + 2N$ Experimenten bestimmt (Eri 66). Die Imaginärteile dieser Konstanten simulieren im optischen Potential die Pionabsorption, die in der Hauptsache an zwei Nukleonen erfolgt.

In der Praxis zeigt sich jedoch, daß es besser ist, die Konstanten als freie Parameter anzunehmen, um für eine Reihe von Kernen optimale Übereinstimmung mit dem Experiment zu erzielen (Kre 69). Im Rahmen einer numerisch langwierigen Fitprozedur gelingt es tatsächlich, die experimentellen Breiten und Niveauverschiebungen für Kerne mit Massenzahlen $A \gtrsim 12$ mit einem einzigen Parametersatz zu reproduzieren (Tau 71). Durch Erweitern des obigen Ansatzes (2.1) um die Terme der Ordnung $1/A$ kann man auch die Daten an leichten Kernen mit $A \lesssim 12$ wiedergeben (Tau 74).

Diese "konventionelle" Behandlungsart der Pion-Kern- Wechselwirkung gestattet es, sich in einfacher Weise alle jene pauschalen Informationen über die Pion-Kern-Wechselwirkung zu verschaffen, die einerseits nicht sehr sensitiv auf die Details der Pion-Nukleon-Wechselwirkung im Kern und andererseits nicht sehr empfindlich auf die innere Kernstruktur sind. Mit anderen Worten: Im allgemeinen

lassen sich auf diese Weise, wie eben erläutert, sowohl zuverlässige Werte für Breiten und Niveausverschiebungen erhalten als auch Pion-Wellenfunktionen wenigstens numerisch für weitergehende Rechnungen gewinnen.

Details können natürlich nicht reproduziert werden: Es werden z.B. die Breiten Γ_{π} für ^{16}O und ^{18}O mit dem optischen Potential qualitativ falsch errechnet (Kre 69). Dieser Mißerfolg deutet bereits die grundsätzliche Schwäche konventioneller optischer Potentialrechnungen an: Der Einfluß der inneren Struktur des absorbierenden Kerns bleibt völlig unberücksichtigt, da die Nukleonen des Kerns nur pauschal durch eine noch dazu phänomenologisch eingeführte Dichtefunktion repräsentiert werden.

Durch die Anpassung der Parameter des optischen Potentials an die experimentellen Daten lernt man verständlicherweise nicht allzuviel über den Einfluß von Reaktionsmechanismen oder über die Kernstruktur bei relativ hohen Impulstransfers. Gerade dies sind aber zwei wichtige Gründe, weswegen man die Pionabsorption studiert. Vollends versagt das optische Modell, wenn man sich für spezielle Zerfallskanäle des Pion-Kern-Systems

interessiert und dabei etwa die Winkelverteilung der emittierten Nukleonen mißt.

Eingehendere theoretische Untersuchungen des Pion-Kern-Absorptionsmechanismus, bei dem vom Experiment her die dabei emittierten Nukleonen und/oder der verbleibende Restkern spektroskopiert werden, verlangen daher eine sorgfältigere, mikroskopische Betrachtungsweise des Absorptionsvorganges.

3. Einführen eines mikroskopischen Modells und die Berechnung totaler und partieller Über- gangswahrscheinlichkeiten

Zum mikroskopischen Verständnis des Absorptionsvorganges benötigt man offenbar:

- (i) die Pion-Wellenfunktion im Kerninnern;
- (ii) einen Operator für die Pion-Nukleon-Wechselwirkung;
- (iii) Wellenfunktionen sowohl für die gebundenen als auch für die emittierten Nukleonen.

Die beiden ersten Punkte sind mit dem Reaktionsmechanismus verknüpft, der dritte Punkt beinhaltet Eigenschaften der Kernstruktur. Im konkreten Fall sind diese Effekte miteinander vermischt, wie sich z.B. am elementaren Matrixelement M_{fi} leicht zeigen läßt:

$$M_{fi} = \langle \Omega_f | h_{\pi}^{\text{elementar}} | \Omega_i \Phi_{\pi} \rangle. \quad (3.1a)$$

Hierbei sind Ω_i und Ω_f die exakten Wellenfunktionen des A-Teilchensystems der Nukleonen im Anfangs- bzw. Endzustand. $h_{\pi}^{\text{elementar}}$ beschreibt die Pion-Nukleon-Wechselwirkung bzw. Propagation eines Pions in Kernmaterie, z.B. im Rahmen einer

Rückstreuentwicklung^{*)}:

$$h_{\pi}^{\text{elementar}} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

In praxi arbeitet man mit Modellwellenfunktionen Ψ :

$$\Omega = U \cdot \Psi. \quad (3.1b)$$

Dabei bezeichnet U die Modifikationen, um aus den Modellwellenfunktionen Ψ die exakten Wellenfunktionen Ω zu konstruieren. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \Psi_f | U^{-1} h_{\pi}^{\text{elementar}} U | \Psi_i \Phi_{\pi} \rangle \\ &= \langle \Psi_f | H_{\text{eff}} | \Psi_i \Phi_{\pi} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1c)$$

mit $H_{\text{eff}} = U^{-1} h_{\pi}^{\text{elementar}} U = H_{\text{eff}}(1, 2, \dots, A).$

Der effektive Operator H_{eff} beinhaltet also im allgemeinen sowohl Annahmen über den Reaktionsmechanismus ($h_{\pi}^{\text{elementar}}$) als auch über die Kernstruktur (U). Darauf wird in Kapitel 3.1.4 noch näher eingegangen.

In der vorliegenden Arbeit haben wir folgende Modellannahmen getroffen:

zu (i): Wir verwenden für die Pion-Wellenfunktionen distortierte Coulomb-Wellenfunktionen, d.h. Wellenfunktionen, die durch den Realteil des optischen

^{*)} Auf Einzelheiten des Rückstreumechanismus soll hier nicht eingegangen werden; siehe dazu z.B. Kol 66 oder Hel 74.

Potentials nach Ericson (Eri 66) zusätzlich verzerrt sind. Der Imaginärteil des optischen Potentials wird null gesetzt, da die Absorptionsvorgänge explizit durch ein mikroskopisches Modell berechnet werden. Dahinter steht die Annahme, daß Absorptionseffekte klein sind und keine großen Beiträge zur Energieverschiebung liefern. Testrechnungen haben dies bestätigt. Im Rahmen einer konsequenten Anwendung der Störungstheorie ist es sinnvoll, solche verzerrten Wellenfunktionen zu verwenden. In einer vereinfachten Rechnung werden jedoch auch unverzerrte Coulomb-Wellenfunktionen herangezogen.

zu (ii): Die Pion-Nukleon-Wechselwirkung $h_{\pi}^{\text{elementar}}$ wird durch den nichtrelativistischen Chew-Low-Operator H_{CL} dargestellt, der durch einen nichtstatischen Term erweitert ist (Chu 70):

$$h_{\pi}^{\text{elementar}} = H_{CL} = t/m_{\pi} (\vec{\nabla}_{\pi} - m_{\pi}/m_N \vec{\nabla}_N) \cdot \vec{\sigma} \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}_{\pi}. \quad (3.1d)$$

zu (iii): Für die gebundenen wie für die emittierten Nukleonen verwenden wir Schalenmodellwellenfunktionen in einem Woods-Saxon-Potential, die durch die sogenannte "Jastrow"-Korrelationsfunktion $f(r_{ij})$ modifiziert sind. Wir spezialisieren den Operator U (3.1b) also folgendermaßen:

$$U = \prod_{i < j} f(r_{ij}). \quad (3.1e)$$

Die Korrelationsfunktion hängt in der hier ange-

wendeten einfachen Form nur vom Relativabstand r_{ij} zweier Nukleonen ab. Im Hinblick auf eine bequeme Handhabung definiert man eine Funktion $g(r_{ij})$ (Chu 70, Hub 70):

$$f(r_{ij}) = 1 - g(r_{ij}) \quad (3.1f)$$

Ohne das Problem "Pion-Rescattering" oder "kurzreichweitige Korrelation" an dieser Stelle lösen zu wollen, haben wir hier den Impulstransfer zwischen den an der

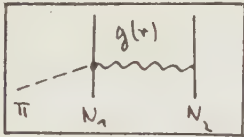


Fig. 3.1: Parametrisierung des Impulstransfers im Ortsraum durch $g(r)$.

Reaktion beteiligten Nukleonen im Ortsraum durch die Funktion $g(r)$ in effektiver Weise parametrisiert.

Um das hier auftretende nukleare Vielkörperproblem zu lösen, führen wir, wie in Kap. 3.1.4 näher erläutert, mit Hilfe der Funktion $g(r)$ eine Cluster-Entwicklung von H_{eff} durch. Wir lassen in unserem Modell sowohl für die 1N- wie für die 2N-Emissionsprozesse immer zwei Nukleonen an der Reaktion teilnehmen.

Dies soll kurz erläutert werden.

Aus kinematischen Gründen (gleichzeitige Erfüllung von Energie- und Impulssatz) wird der Prozeß der Pion-Absorption zwar von einem Mechanismus beherrscht, an dem mindestens zwei Nukleonen beteiligt sein müssen.

Aber andererseits sollte ein Modell, das wegen der kurzreichweitigen Natur der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung maximal nur zwei Nukleonen am Prozeß teilnehmen läßt, bereits befriedigende Resultate liefern. D.h. Korrelationen von drei oder mehr Nukleonen können zunächst vernachlässigt werden. Diese Näherung macht das Problem im vorliegenden Rahmen überhaupt erst einer realistischen Rechnung zugänglich.

Die nach der Pionabsorption emittierten Nukleonen können spektroskopiert werden. Man kann einerseits aus den Energie- und Impulsspektren dieser Nukleonen Aufschluß über die Schalenstruktur des Kernes erhalten und andererseits aus ihrer Korrelation Schlüsse über die Eigenschaften korrelierter Nukleonenpaare ("Quasi-Deuteronen") und damit über die Natur der Nukleon-Nukleonkräfte an sich ziehen, vorausgesetzt, daß distortierende Effekte für das absorbierte Pion im Anfangszustand und für die auslaufenden Nukleonen im Endzustand klein sind.

Gewöhnlicherweise werden die in unserem Modell beteiligten beiden Nukleonen ins Kontinuum emittiert. Aber daneben kommt es vor, daß eines der beiden zu emittierenden Nukleonen im Kern "steckenbleibt". Das Energiespektrum des anderen Nukleons wird dann eine charakteristische Struktur aufweisen, entsprechend der Schalenstruktur des emittierenden Kernes.

Der Anteil der 1-Nukleon-Emission an der totalen Breite eines pionischen Niveaus ist freilich gegenüber der 2-Nukleonen-Emission gering.

Mit den oben angeführten speziellen Annahmen (i), (ii) und (iii) werden im einzelnen folgende Größen berechnet und erörtert:

- a) totale Absorptionswahrscheinlichkeit (2-N-Emission)
- b) Absorptionsraten für pn- und nn-Emission
- c) Energie- und Winkelverteilungen der emittierten Nukleonen
- d) Verhältnis von nn/pn-Absorptionsraten
- e) differentielle 1-N-Spektren
- f) Absorptionswahrscheinlichkeit für 1-N-Emission
- g) Verhältnis 2-N/1-N-Emission

Aus dem Vergleich mit vorliegenden experimentellen Daten sollen Rückschlüsse gezogen werden auf

- die Güte der verwendeten Annahmen
- den dominierenden Reaktionsmechanismus.

3.1 Formalismus für die 2-N-Emission

Eine unserer wesentlichen Modellannahmen ist die, daß immer zwei Nukleonen an der Reaktion teilnehmen, seien es nun 1N- oder 2N-Emissionsprozesse.



Fig. 3.2

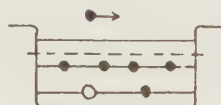


Fig. 3.3



Fig. 3.4

Wir betrachten im folgenden den Fall, bei dem die Absorption des Pions unter Emission von zwei Nukleonen aus dem Kern ins Kontinuum erfolgt (Fig. 3.2).

Anhand dieses Prozesses werden die notwendigen technischen Details, nämlich Annahme eines Modells zur Festlegung der Wechselwirkungsoperatoren und der Wellenfunktionen, sowie der Vorgang der Drehimpulsumkopplungen erläutert. Diese etwas mühsam erscheinende Arbeit lohnt sich insofern, als dann der Fall, bei dem die Absorption des Pions unter Emission von nur einem Nukleon ins Kontinuum erfolgt, wobei das andere Nukleon oberhalb oder unterhalb der Fermikante des Restkerns sitzenbleibt (Fig. 3.3, 3.4), mehr oder weniger als Spezialfall der 2-N-Emission erscheint.

Es wird zunächst die allgemeine Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit W aufgestellt. Diese Übergangswahrscheinlichkeit W wird dann später immer sofort in eine Breite $\Gamma = \hbar W$ umgerechnet, um besser mit experimentellen Daten aus pionischen Atomen vergleichen zu können. Es sind daher für das Folgende die Bezeichnungen "Übergangswahrscheinlichkeit" und "Breite" als Synonyme zu betrachten. Manche etwas umfangreichen Herleitungen werden in die Anhänge verlegt.

3.1.1 Phasenraum für 2-N-Emission

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist allgemein gegeben durch (Muir 65):

$$dW = (2\pi)^4 \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2 \prod_{k=1}^N (2\pi)^{-3N} d^3 p_{fk} \delta^{(4)}(p_i^{(4)} - p_f^{(4)}). \quad (3.2)$$

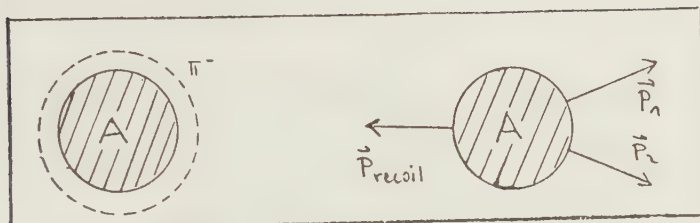
Dabei bedeutet $\sum_i$ Mittelung über die Anfangszustände und $\sum_f$ Summation über die mit den Anfangsbedingungen verträglichen Endzustände.

$\delta^{(4)}(p^{(4)})$ ist die 4-Delta-Funktion mit dem 4-Vektor $p^{(4)}$ als Argument. $p_i^{(4)}$ und $p_f^{(4)}$ sind die 4-Impulse von Anfangs- und Endzustand.

M_{fi} ist das Übergangsmatrixelement:

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle. \quad (3.3)$$

Man beachte bei obiger Formulierung der Übergangswahrscheinlichkeit die Voraussetzung, daß alle dynamisch in den Prozeß eingehenden Fermionen-Wellenfunktionen einen Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{m}{E}}$ und alle Bosonen-Wellenfunktionen einen Normierungsfaktor $1/\sqrt{E}$ enthalten, um eine relativistisch korrekte Normierung sicherzustellen.



Pion-Kern-System vor
der Wechselwirkung

Pion-Kern-System nach
der Wechselwirkung

Fig. 3.5

Speziell für die Absorption eines am Kern A gebundenen Pions und anschließender Emission zweier Nukleonen (Fig. 3.5) lautet die Formel:

$$dW = (2\pi)^4 \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2 (2\pi)^{-9} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_{\text{recoil}} \times \delta^{(4)}(p_i^{(4)} - p_f^{(4)}). \quad (3.4)$$

Die totale Übergangswahrscheinlichkeit W erhält man, indem man die Summen ausführt und über die Impulse unter Beachtung der δ -Funktion integriert:

$$W = \int dW = (2\pi)^5 \int dE_1 d\Omega_1 d\Omega_2 E_1 p_1 E_2 p_2 \times \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2. \quad (3.5)$$

Dabei wurde der Einfachheit halber angenommen, daß m_{recoil} viel größer ist als alle anderen am Prozeß beteiligten Massen und Energien. Es erscheint daher kein expliziter Term für den Rückstoßkern.

Die Summationen $\sum_i$ und $\sum_f$ werden im Zusammenhang mit der Ausreduktion der Drehimpulse explizit berücksichtigt.

Die totale Energie E_K pro emittiertem Nukleon kann im vorliegenden Prozeß nichtrelativistisch berechnet werden:

$$E_K = p_K^2 / 2m_N + m_N. \quad (3.6)$$

3.1.2 π -N-Operator

Wir verwenden für die Pion-Nukleon-Wechselwirkung die nichtrelativistische Reduktion des pseudo-vektoriellen π -N-Hamiltonians mit freien Spinoren. Die nichtrelativistische Form des Hamiltonians wird als Galilei-invariant angenommen (Chew-Low-Operator) und lautet:

$$H_{\alpha} = G \{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\pi}) (\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}_{\pi}) - \frac{m_{\pi}}{m_N} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_N) (\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}_{\pi}) \}. \quad (3.7)$$

Dabei ist

$$G := f/m_{\pi} ;$$

$$f^2/4\pi = 0.083 \pm 0.005,$$

und

- $\vec{\Phi}_{\pi}$ = Pion-Wellenfunktion
- $\vec{\tau}$ = Isospin-Operator für das Nukleon
- $\vec{\sigma}$ = Spin-Operator für das Nukleon.

3.1.3 Wellenfunktionen gebundener und freier Nukleonen

Bevor wir darangehen, den π -Kern-Hamiltonian hinzuschreiben, müssen wir die Kernwellenfunktionen aufstellen. Die π -Kern-Wechselwirkung ist eng mit den Eigenschaften des Kernels verknüpft. Es erweist sich als vorteilhaft, gewisse Aspekte davon in einen effektiven π -Kern-Hamilton-Operator einzubeziehen.

Im Schalenmodell des Kernels ist die Wellenfunktion

$\Psi(h, \dots, A)$ des Kernels bestimmt durch:

$$H_{\text{Kern}}(\eta, \dots, A) \Psi(\eta, \dots, A) = E \Psi(\eta, \dots, A),$$

$$H_{\text{Kern}}(\eta, \dots, A) = \sum_{i=1}^A H_{sm}(i),$$

$$H_{sm}(i) = T_i + V(\vec{r}_i).$$

(3.8)

$\Psi(\eta, \dots, A)$ ist vollständig antisymmetrisiert in den Einteilchen-Wellenfunktionen Ψ_{α_i} und im allgemeinen zu Drehimpuls $\vec{J}$ und Isospin T gekoppelt.

$$\Psi(\eta, \dots, A) = \mathcal{A}[\Psi_{\alpha_1}(\eta) \Psi_{\alpha_2}(\eta) \dots \Psi_{\alpha_A}(\eta)]^{[J]}^{[T]} \quad (3.9)$$

$\mathcal{A}$ = Antisymmetrisierungsoperator.

Die Einteilchen-Wellenfunktionen $\Psi_{\alpha_i}(i)$ sind Eigenfunktionen zu $H_{sm}(i)$:

$$\{T_i + V(\vec{r}_i)\} \Psi_{\alpha_i}(i) = \epsilon_{\alpha_i} \Psi_{\alpha_i}(i) \quad (3.10)$$

Bekanntlich ist die N-N-Wechselwirkung für kleine Abstände stark repulsiv. Dieser kurzreichweitige, abstoßende Anteil der N-N-Wechselwirkung bewirkt eine Korrelation der Nukleonen. Dieser Aspekt ist im IPM außer acht gelassen. Er wird, einem Vorschlag Jastrows (Jast 55) folgend, durch eine Kor-

relationsfunktion $f(r_{ij})$ eingeführt. Die korrelierte A-Teilchen-Wellenfunktion lautet damit:

$$\Psi(h, \dots, A) = \prod_{i < j}^A f(r_{ij}) \Psi(h, \dots, A). \quad (3.11)$$

$f(r_{ij})$ hängt hier nur vom Relativabstand $r_{ij} = |r_i - r_j|$ zweier Nukleonen i und j ab. Die Korrelationsfunktion sollte im Prinzip von Spin und Isospin der korrelierten Nukleonen abhängen. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir hier von einer solchen Zustandsabhängigkeit absehen.

Geeigneterweise entwickelt man die Korrelationsfunktion nach sphärischen Besselfunktionen.

Der Parameter q' ist dann maßgebend für die Größe des Impulsaustausches zwischen den Nukleonen ^{*)}:

$$\begin{aligned} f(r_{ij}) &= 1 - g(r_{ij}) = 1 - \int dq' w(q') j_0(q'r) \\ &= 1 - 4\pi \int dq' w(q') \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hat{\lambda} j_{\lambda}(q'r_i) j_{\lambda}(q'r_j) \\ &\quad \times [Y^{[\lambda]}(\hat{r}_i) \otimes Y^{[\lambda]}(\hat{r}_j)]^{[0]} \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei $\hat{\lambda} := (2\lambda + 1)^{1/2}$.

^{*)} Es wird in dieser Arbeit stets die Danos-Phasenkonvention verwendet (Dan 71): $Y_{m}^{[\lambda]} = (-i)^L Y_{Lm}$.

Aus Gründen der Einfachheit wird die gleiche Korrelationsfunktion sowohl für den Anfangs- wie für den Endzustand verwendet. Ferner wird nur der Austausch eines einzigen Impulswertes $q' = q$ zugelassen:

$$w(q') = \delta(q - q'). \quad (3.13)$$

Die Korrelationsfunktion wird (s. Kap. 3.1.4) einem effektiven π -Kern-Operator zugeschlagen, sodaß es hier reicht, die unkorrelierte A-Nukleon-Wellenfunktion auf der Basis des Schalenmodells weiter im Detail zu betrachten. Die formalen Einzelheiten dazu sind im Anhang A zu finden.

Wir beschränken uns auf Kerne mit abgeschlossenen Schalen. Dann ist die vollständig antisymmetrisierte Wellenfunktion im Anfangszustand eine Slaterdeterminante und diese ist automatisch zu $J=0$ und $T=0$ gekoppelt:

$$\gamma_i(h, \dots, A) = \gamma^{[0][0]}(h, \dots, A). \quad (3.14)$$

Der Anhang A zeigt, wie daraus eine 2-Teilchen-Wellenfunktion ausgekoppelt wird:

$$\psi^{[0][0]}(1, \dots, A) = \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \exists \alpha \beta, M_{\alpha \beta} \\ T_{\alpha \beta}, M_{T_{\alpha \beta}}} \phi_{M_{\alpha \beta}, M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2) \\ \times \psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A). \quad (3.15)$$

Dabei sind $\psi^{[0][0]}$, $\phi_{M_{\alpha \beta}, M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2)$
 und $\psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A)$

jeweils vollständig antisymmetrisiert und auch jeweils auf eins normiert.

Für die Wellenfunktion des Endzustandes gehen wir ähnlich vor. Wir müssen jedoch beachten, daß die beiden emittierten Nukleonen frei, also ungekoppelt sowohl untereinander als auch mit dem Restkern sind:

$$\psi_f(1, \dots, A) = \phi_{\mu\nu}(1, 2) \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \exists \bar{\alpha} \bar{\beta}, M_{\bar{\alpha} \bar{\beta}} \\ T_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}, M_{T_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}}} \psi_{-M_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}, -M_{T_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}}}^{[\exists \bar{\alpha} \bar{\beta}][T_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}]}(3, \dots, A). \quad (3.16)$$

μ, ν sind die zur Spezifizierung des Kontinuumszustandes notwendigen Quantenzahlen der beiden herausfliegenden Nukleonen.

Für die Restkern-Wellenfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}}^{[\alpha\beta][T\alpha\beta]}(\beta, \dots, A) | \psi_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}}^{[\alpha\beta][T\alpha\beta]}(\beta, \dots, A) \rangle \\ = \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} \dots \quad (3.17) \end{aligned}$$

Der Restkern geht dynamisch nicht in den Prozeß ein.

3.1.4 effektiver π -Kern-Operator

Wie oben bereits erwähnt, ist es zweckmäßig, einen effektiven Hamilton-Operator für die π -Kern-Wechselwirkung einzuführen, bestehend aus dem Hamiltonian der elementaren π -N-Wechselwirkung und der effektiven N-N-Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(1, \dots, A) &= \left\{ \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^A f(r_{ij}) \right\} \left\{ \sum_{k=1}^A H_{\alpha}(k) \right\} \left\{ \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^A f(r_{ij}) \right\} \\ &= \left\{ \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^A (1 - g(r_{ij})) \right\} \left\{ \sum_{k=1}^A H_{\alpha}(k) \right\} \left\{ \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^A (1 - g(r_{ij})) \right\}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Man entwickelt diesen Hamiltonian nach der Anzahl der beteiligten Nukleonen und berücksichtigt dabei die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit für die gleichzeitige Wechselwirkung von drei und mehr

Nukleonen vernachlässigbar gering ist:

$$H_{\text{eff}}(1, \dots, A) = h^{(1)} + h^{(2)} + \dots + h^{(A)}. \quad (3.19)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= \sum_{k=1}^A H_{cl}(k) \\ h^{(2)} &= - \left\{ \sum_{\substack{i < j \\ i > j}}^A g(r_{ij}) [H_{cl}(i) + H_{cl}(j)] \right. \\ &\quad \left. + [H(i) + H(j)] g(r_{ij}) \right\} \\ &= -2 \sum_{\substack{i, j \\ i > j}}^A [H_{cl}(i) + H_{cl}(j)] g(r_{ij}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Beim letzten Schritt wurde die Annahme gemacht, daß g mit H_{cl} vertauscht:

$$[g, H_{cl}]_- = 0. \quad (3.21)$$

Die höheren Ordnungen in $g(r_{ij})$ werden ebenso wie alle "unlinked" Terme vernachlässigt. $h^{(1)}$ ist ein Einteilchenoperator und kann zur Absorption der Pionen nicht beitragen.

Wegen der Identität der A-Nukleonen im Kern kann der nurmehr interessierende Zweiteilchenoperator $h^{(2)}$ vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 h^{(2)} &= -2 \frac{A(A-1)}{2} [H_{cl}(1) + H_{cl}(2)] g(x_2) \\
 &=: -2 \frac{A(A-1)}{2} H(1,2). \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Damit ist das A-Teilchenproblem auf ein effektives 2-Teilchenproblem reduziert.

3.1.5 Matrizelement M_{fi}

Die Formeln (3.15), (3.16), (3.17) und (3.22) werden in das Matrizelement M_{fi} (3.3) eingesetzt. Dann hat man:

$$M_{fi} = 2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \vec{J}_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}} \langle \phi_{\mu\nu}(1,2) | H(1,2) | \phi_{\substack{[\vec{J}_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}} } (1,2) \rangle. \quad (3.23)$$

Da der Operator $H(1,2)$ symmetrisch in Teilchen 1 und 2 ist, kann man sich die Antisymmetrisierung der Wellenfunktionen auf einer Seite des Matrizelementes, z.B. der linken, unter Einfügen eines Faktors 2 sparen. Wir greifen auf die explizite Gestalt der Wellenfunktionen im Anhang A zurück und schreiben:

$$M_{fi} = 2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \vec{J}_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{\mu}(1) \psi_{\nu}(2) - \psi_{\nu}(1) \psi_{\mu}(2) \} | H_A(1,2) | \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi}_{\substack{[\vec{J}_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}} } (1,2) \right\rangle. \quad (3.24)$$

Daraus folgt:

$$M_{fi} = 2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \vec{J}_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}} \langle \psi_{\mu}(1) \psi_{\nu}(2) | H_A(1,2) | \bar{\phi}_{\substack{[\vec{J}_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}} } (1,2) \rangle. \quad (3.25)$$

Dabei ist $\bar{\phi} := \sqrt{2} \phi$.

Die Funktionen $\bar{j}_l(kr)$ sind die Radialanteile der Kontinuums-Wellenfunktionen im Potential des Kerns. Sie sind so gewählt, daß sie im freien Fall in die sphärischen Besselfunktionen $j_l(kr)$ übergehen. Diese Radialanteile werden künftig, da sie bei den Drehimpulsumkoppelungen nicht stören, in das Symbol " j_l " mit einbezogen.

ξ bzw. ζ stehen für den Spin- bzw. Isospinanteil der Wellenfunktion.

Analoges gilt für $y_v(2)$.

Damit gilt für das Produkt $y_\mu(1) \cdot y_\nu(2)$:

$$\begin{aligned}
 y_\mu(1) y_\nu(2) &= (4\pi)^2 \sum_{l_Y m_Y} i^{l_Y} \bar{j}_{l_Y}(k_1 r_1) y_{m_Y}^{[l_Y]}(\hat{k}_1) \\
 &\times \sum_{l_D m_D} i^{l_D} \bar{j}_{l_D}(k_2 r_2) y_{m_D}^{[l_D]}(\hat{k}_2) \\
 &\times \sum_{j_Y m_{j_Y}} (l_Y m_Y \frac{1}{2} s_Y | j_Y m_{j_Y}) \sum_{j_D m_{j_D}} (l_D m_D \frac{1}{2} s_D | j_D m_{j_D}) \\
 &\times \sum_{\xi_Y \delta M_{Y\delta}} (j_Y m_{j_Y} j_D m_{j_D} | \xi_Y \delta M_{Y\delta}) [j_Y \otimes j_D]_{M_{Y\delta}}^{[\xi_Y \delta]} \\
 &\times \sum_{T_{Y\delta} M_{T_{Y\delta}}} (\frac{1}{2} t_Y \frac{1}{2} t_D | T_{Y\delta} M_{T_{Y\delta}}) [\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}]_{M_{T_{Y\delta}}}^{[T_{Y\delta}]} .
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Das Matricelement M_{fi} sieht damit schließlich folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 M_{fi} = & 2 (4\pi)^2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\beta}, M_{T\alpha\beta}}} \sum_{\substack{l_Y m_Y \\ j_Y m_{j_Y}}} \sum_{\substack{l_\delta m_\delta \\ j_\delta m_{j_\delta}}} \sum_{\substack{\exists_{Y\delta} M_{Y\delta} \\ T_{Y\delta} M_{T_{Y\delta}}} } \\
 & \times i (l_Y + l_\delta) \gamma_{m_Y}^{[l_Y]*}(\hat{k}_1) \gamma_{m_\delta}^{[l_\delta]*}(\hat{k}_2) \\
 & \times (l_Y m_Y \frac{1}{2} s_Y | j_Y m_{j_Y}) (l_\delta m_\delta \frac{1}{2} s_\delta | j_\delta m_{j_\delta}) \\
 & \times (j_Y m_{j_Y} j_\delta | \exists_{Y\delta} M_{Y\delta}) \\
 & \times (-)^{2\exists_{Y\delta} - l_\pi + \exists_{\alpha\beta} + M_{Y\delta}} \begin{pmatrix} \exists_{Y\delta} & l_\pi & \exists_{\alpha\beta} \\ -M_{Y\delta} & m_{l_\pi} & M_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\
 & \times (\frac{1}{2} t_Y \frac{1}{2} t_\delta | T_{Y\delta} M_{T_{Y\delta}}) \\
 & \times (-)^{2T_{Y\delta} - t_\pi + T_{\alpha\beta} + M_{T_{Y\delta}}} \begin{pmatrix} T_{Y\delta} & t_\pi & T_{\alpha\beta} \\ -M_{T_{Y\delta}} & m_{t_\pi} & M_{T_{\alpha\beta}} \end{pmatrix} \\
 & \times [\exists_{Y\delta} | l_\pi | \exists_{\alpha\beta}] [T_{Y\delta} | t_\pi | T_{\alpha\beta}].
 \end{aligned}$$

(3.28)

Hier wurde bereits von einigen Eigenschaften des Wechselwirkungsoperators Gebrauch gemacht, nämlich: $\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}_\pi = \tau_-$ für die Absorption eines negativen Pions,

und: Der Operator überträgt den Drehimpuls l_π mit der magnetischen Quantenzahl m_{l_π} .

Die Symbole $[... | ... | ...]$ stehen für die reduzierten Matrixelemente nach Danos (Dan 71). Sie setzen sich im einzelnen aus mehreren Anteilen $m_{\pi_1}, m_{\pi_2}, \dots, m_{\pi_6}, m_{t_1}, m_{t_2}, m_{t_3}, m_{t_4}$ zusammen, die im Anhang B ausgeführt sind:

$$[T_{\gamma\delta} | t_\pi = 1 | T_{\alpha\beta}] [\bar{T}_{\gamma\delta} | l_\pi | \bar{T}_{\alpha\beta}] \quad (3.29)$$

$$= m_{t_1}(m_{\pi_1} + m_{\pi_2}) + m_{t_2}(m_{\pi_3} + m_{\pi_4}) - [m_{t_1}(m_{\pi_5} + m_{\pi_6}) + m_{t_4}(m_{\pi_7} + m_{\pi_8})]$$

$$- \frac{m_\pi}{m_N} \{ m_{t_1}(m_{\pi_9} + m_{\pi_{10}}) + m_{t_2}(m_{\pi_{11}} + m_{\pi_{12}}) - [m_{t_3}(m_{\pi_{13}} + m_{\pi_{14}}) + m_{t_4}(m_{\pi_{15}} + m_{\pi_{16}})] \}.$$

Die reduzierten Matrixelemente $m_{\pi_1}, \dots, m_{\pi_6}$ enthalten jeweils den Gradientenoperator ∇_π , während $m_{\pi_7}, \dots, m_{\pi_{16}}$ jeweils ∇_N haben.

$m_{t_1}, m_{t_2}, m_{t_3}, \dots, m_{t_4}, m_{g_1}, \dots, m_{g_2}$ sind die direkten Terme für Isospin und Drehimpuls, die übrigen sind die Austauschtermine.

3.1.6 Totale Übergangswahrscheinlichkeit

Wir setzen das Matrixelement (3.28) in die Formel (3.29) ein. Wir spezifizieren jetzt $\bar{\sum}_i$ und $\sum_f$. Die Mittelung $\bar{\sum}_i$ besteht nur aus $\sum_{m, l_\pi} \hat{l}_\pi^{-2}$. Die $\sum_f$ summiert über die beobachtbaren Spin- und Isospinquantenzahlen $s_Y, s_\delta, t_Y, t_\delta, M_{T_{\alpha\beta}}, M_{T_{\alpha\beta}}$. Das Integral über $d\Omega_n$ und $d\Omega_2$ bringt die Kugelflächenfunktionen $Y_n^{(l)}(u_n), Y_n^{(l)}(u_2)$ zum Verschwinden. Auf Grund von Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen gehen auch die Kopplungskoeffizienten für die Drehimpulse weg, wie zu erwarten war. Bei den Isospins bleibt ein Faktor $\frac{1}{3} = \sum_{M_{T_{\alpha\beta}}, M_{T_{Y\delta}}} \begin{pmatrix} T_{Y\delta} & T_{\alpha\beta} & 1 \\ -M_{T_{Y\delta}} & M_{T_{\alpha\beta}} & 0 \end{pmatrix}^2$ übrig, der davon herrührt, daß über die Ladung der Pionen nicht summiert wird.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann:

$$W_{\text{tot}} = (2\pi)^5 4 (4\pi)^4 \frac{1}{3} \frac{1}{\pi^2} \int dE_n E_n p_n E_2 R$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ T_{\alpha\beta}, T_{Y\delta} \\ l_Y, l_\delta \\ s_Y, s_\delta}} \left| [T_{Y\delta} | t_\pi | T_{\alpha\beta}] [\bar{T}_{Y\delta} | l_\pi | \bar{T}_{\alpha\beta}] \right|^2.$$

(3.30)

Schließlich werden aus den reduzierten Matrixelementen noch Faktoren und Summen herausgezogen, die aus dem Hamiltonian stammen, und zwar:

der Normierungsfaktor $(2m_\pi)^{-1/2}$ der Pionwellenfunktion,
 der Faktor G aus dem Operator,
 ein Faktor $\sqrt{3}$ aus dem Skalarprodukt $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$
 und ein Faktor (4π) aus der Korrelationsfunktion
 sowie $\sum_\lambda \hat{\lambda}$ aus der Korrelationsfunktion.

Damit hat man endgültig:

$$W_{tot} = (2\pi)^{-5} \frac{2}{m_\pi} G^2 (4\pi)^6 \hat{l}_\pi^{-2} \int dE_1 E_1 p_1 E_2 p_2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta} \\ \exists_{\gamma\delta}, T_{\gamma\delta} \\ l_\gamma, l_\delta \\ j_\gamma, j_\delta}} |S|^2. \quad (3.31)$$

Dabei ist:

$$S := [T_{\gamma\delta} | \bar{t}_\pi | T_{\alpha\beta}] \sum_\lambda \hat{\lambda} [\exists_{\gamma\delta} | \bar{l}_\pi | \exists_{\alpha\beta}]. \quad (3.32)$$

$\bar{t}_\pi$ bzw. $\bar{l}_\pi$ bedeutet, daß die oben erwähnten Faktoren und Summen aus den reduzierten Matrixelementen herausgezogen sind.

3.1.7 Übergangswahrscheinlichkeiten für

(pn) und (nn) Emission

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man, wenn man in der Formel (3.31) die Summation $\sum_{t_Y t_J}$ über die Ladung der emittierten Nukleonen unterläßt. Der Faktor $1/3$, der oben aus dem Isospin-3-j-Symbol stammte, tritt folglich nicht auf.

$$\begin{aligned}
 W(t_Y, t_J) &= (2\pi)^{-5} \frac{6}{m_\pi} G^2 (4\pi)^6 \hat{1}_\pi^{-2} \\
 &\times \int dE_1 E_2 p_1 E_2 p_2 \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ T_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta} \\ T_{YJ} \\ l_Y, l_J \\ j_Y, j_J}} |A|^2
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

mit

$$A := \sum_{T_{YJ}} \hat{T}_{YJ} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T_{YJ} \\ t_Y & t_J & -M_{T_{YJ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{YJ} & 1 & T_{\alpha\beta} \\ -M_{T_{YJ}} & -1 & M_{T_{\alpha\beta}} \end{pmatrix} \int. \quad (3.34)$$

3.1.8 Energie- und Winkelverteilungen für 2-N-Emission

Schließlich wird der Vollständigkeit halber die Formel für die Winkelverteilung der emittierten Nukleonen angegeben, wobei der Restkern in einem bestimmten Anregungszustand zurückbleibt. Man erhält sie unmittelbar aus dem Betragsquadrat des Matrixelementes (3.28) :

$$\frac{d^2 W'}{dE_1 d(\cos \theta)} = (2\pi)^{-5} \frac{3}{m_\pi} G^2 (4\pi)^6 \hat{l}_\pi^{-2} E_1 p_1 E_2 p_2$$

$$\times \sum_l \hat{l}^2 P_l(\cos \theta)$$

$$\times \sum_{J_1 J_2} \sum_{l_1 l_2} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_1' \hat{j}_2' (-)^{j_2 + j_2' + J_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ j_1' & j_2' & l_2 \\ J_1 & J_2 & J_1' \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ j_1' & j_2' & l_2 \\ J_1 & J_2 & J_1' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ j_1' & j_2' & l_2 \\ J_1 & J_2 & J_1' \end{Bmatrix}$$

$$\times A \cdot A^*$$

(3.35)

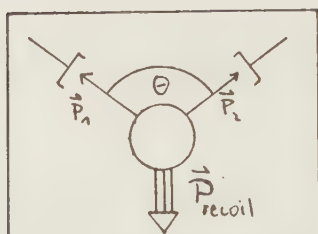


Fig. 3.6: Schematische Meßanordnung
für die Energie- und Winkelverteilung der Nukleonen

Dabei ist A wie in (3.34) definiert. θ ist der Winkel zwischen den emittierten Nukleonen (Fig. 3.6).

3.2 1-N-Emission

Bei der Absorption eines Pions am Kern unter Emission eines einzigen Nukleons sind wie bei der 2-N-Emission ebenfalls dominant zwei Nukleonen am Prozeß beteiligt. Es wird lediglich eines der beiden Nukleonen nicht ins Kontinuum gehoben, sondern verbleibt im Verband des Restkerns.

Es ergeben sich nun zwei Möglichkeiten:

- a) entweder besetzt dieses Teilchen einen Platz unterhalb der Fermikante, was wegen des Pauliprinzips nur heißen kann, es bleibt auf seinem ursprünglichen Platz sitzen, oder es "fällt" in das vom emittierten Nukleon zurückgelassene Loch,
- b) oder es nimmt eines der freien Niveaus oberhalb der Fermikante ein.

In jedem Fall kann man feststellen, wenn man die Energie des emittierten Nukleons mißt, in welcher Schale des Restkerns sich das Loch befindet, und ob das steckengebliebene Nukleon oberhalb oder unter-

halb der Fermikante Platz genommen hat.

Wir spezialisieren zunächst die allgemeine Formel (3.31) für die Übergangswahrscheinlichkeit auf den Fall der 1-N-Emission. Sodann wird das Matrixelement M_{fi} angegeben.

3.2.1 Phasenraum für 1-N-Emission

Aus der allgemeinen Formel (3.2) für die Übergangswahrscheinlichkeit läßt sich unser spezieller Fall herleiten (Muir 65):

$$W_{\text{tot}} = (2\pi)^{-2} E_n E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} \int d\Omega_n \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2. \quad (3.36)$$

E_{initial} ist die Gesamtenergie des Anfangszustandes. Die Summationen $\sum_i, \sum_f$ werden wieder später erläutert.

3.2.2 Operatoren und Korrelationsfunktion

Die Operatoren und Korrelationsfunktionen sind dieselben wie bei der 2N-Emission (s. Formeln (3.7) und (3.12)).

3.2.3 Wellenfunktionen gebundener und freier Nukleonen

Als Wellenfunktion Ψ_I für den Anfangszustand wählen wir die Form (A.27) aus dem Anhang A:

$$\begin{aligned}
 \Psi_I(\eta_1, \dots, A) &= \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta}}} \hat{\exists}_{\alpha\beta} \hat{T}_{\alpha\beta} \left[\hat{\Phi}^{[\exists_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(\eta_1, \eta_2) \right. \\
 &\quad \left. \otimes \Psi^{[\exists_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(\beta_1, \dots, A) \right]^{[0][0]} \\
 &= \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta}}} \hat{\exists}_{\alpha\beta} \hat{T}_{\alpha\beta} \Psi^{[\exists_{\alpha\beta}=0=T_{\alpha\beta}]}(\eta_1, \dots, A).
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Eventuell auftretende Phasen werden in die Wellenfunktion des Restkerns definiert. Ferner seien bereits, gemäß der "Strategie" aus Kap. 3.1.5 alle von der Identität der Teilchen herrührenden Normierungsfaktoren weggelassen. Konsequenterweise tauchen dann vom Operator her auch keine solchen Faktoren mehr auf. Und weiterhin genügt es dann, für die Wellenfunktionen Ψ_F des Endzustandes das (gekoppelte) Produkt der Einteilchen-Wellenfunktionen hinzuschreiben:

$$\Psi_F(1, \dots, A) = \varphi_m(1) \gamma_{M_B, M_{TB}}^{[\Xi_B][T_B]}(1, \dots, A)$$

$$= 4\pi \sum_{l_Y m_Y} i^{l_Y} \gamma_{m_Y}^{[l_Y]*}(\hat{k}_1) \sum_{j_Y m_{j_Y}} (l_Y m_Y \frac{1}{2} s_Y | j_Y m_{j_Y})$$

$$\times \sum_{\substack{\Xi_F M_F \\ T_F M_{TF}}} (j_Y m_{j_Y} \Xi_B M_B | \Xi_F M_F) (\frac{1}{2} t_Y T_B M_{TB} | T_F M_{TF})$$

$$\times [j_Y \otimes \Xi_B]_{M_F}^{[\Xi_F]} [\frac{1}{2} \otimes T_B]_{M_{TF}}^{[T_F]}$$

(3.38)

3.2.4 Matrizelement M_{fi}

Die Formeln (3.37) und (3.38) in das Matrizelement M_{fi} eingesetzt, ergibt:

$$M_{fi} = 2 \cdot 4\pi \sum_{\substack{l_Y m_Y \\ j_Y m_{j_Y}}} \sum_{\substack{\Xi_F M_F \\ T_F M_{TF}}} i^{l_Y} \gamma_{m_Y}^{[l_Y]*}(\hat{k}_1) (l_Y m_Y \frac{1}{2} s_Y | j_Y m_{j_Y})$$

$$\times (j_Y m_{j_Y} \Xi_B M_B | \Xi_F M_F) (\frac{1}{2} t_Y T_B M_{TB} | T_F M_{TF})$$

./.

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \exists \alpha \beta T_{\alpha \beta}}} \hat{T}_{\alpha \beta} \hat{T}_{\alpha \beta} (-)^{2\exists_F - l_\pi + M_F + \exists_I} \begin{pmatrix} \exists_F & l_\pi & \exists_I \\ -M_F & m_{l_\pi} & M_I \end{pmatrix} \\
& \times (-)^{2T_F - t_\pi + M_{T_F} + T_I} \begin{pmatrix} T_F & t_\pi & T_I \\ -M_{T_F} & -1 & M_{T_I} \end{pmatrix} \\
& \times [\exists_F | l_\pi | \exists_I][T_F | t_\pi | T_I]. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Die reduzierten Matrixelemente lassen sich (s. Anhang C) auf die reduzierten Matrixelemente (3.29) zurückführen:

$$[\exists_F | l_\pi | \exists_I] = \sum_{\exists \gamma \delta} (-)^{j_\gamma + j_\delta + \exists \gamma \delta} \hat{\exists}_{\gamma \delta} \hat{\exists}_B \hat{\exists}_{\alpha \beta}^{-1}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \exists \gamma \delta & l_\pi & \exists \alpha \beta \\ \exists_B & j_\delta & j_\gamma \end{Bmatrix} [\exists \gamma \delta | l_\pi | \exists \alpha \beta]$$

$$[T_F | t_\pi | T_I] = \sum_{T \gamma \delta} (-)^{\lambda + T \gamma \delta} \hat{T}_{\gamma \delta} \hat{T}_B \hat{T}_{\alpha \beta}^{-1}$$

$$\times \begin{Bmatrix} T \gamma \delta & t_\pi & T \alpha \beta \\ T_B & n_\pi & n_\pi \end{Bmatrix} [T \gamma \delta | t_\pi | T \alpha \beta].$$

(3.40)

3.2.5 Obergangswahrscheinlichkeit

Bei der Berechnung der totalen Obergangswahrscheinlichkeit bedeutet die Mittelung: $\bar{\Sigma} = \sum_i \hat{L}_\pi^{-2}$,

und die Summe $\sum_f = \sum_{\substack{f_Y, t_Y \\ \exists_B, m_B \\ T_B, m_{TB}}}$.

Zusammen mit dem Integral über $d\Omega_n$ verschwinden die Kugelfunktionen $Y_m^{[L]}(\hat{k})$ und die Kopplungskoeffizienten.

Es bleibt übrig:

$$W = (2\pi)^2 E_\gamma E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} 4 (4\pi)^2 \frac{1}{3} \hat{L}_\pi^{-2}$$

$$\times \sum_{l_Y} \sum_{\substack{\exists_F \bar{T}_F \\ \exists_B \bar{T}_B}} \left| \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_\alpha \bar{T}_\alpha}} \hat{\exists}_\alpha \hat{T}_\alpha [\exists_F | l_\pi | \exists_I] [T_F | t_\pi | T_I] \right|^2$$

$$= (2\pi)^2 E_\gamma E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} 4 (4\pi)^2 \frac{1}{3} \hat{L}_\pi^{-2}$$

$$\times \sum_{l_Y} \sum_{\exists_B \bar{T}_B} \left| \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists_\alpha \bar{T}_\alpha}} \sum_{\exists_\gamma \bar{T}_\gamma} (-)^{j_\gamma + j_\delta + \exists_\gamma \delta + \exists_\gamma \gamma} \hat{\exists}_\gamma \hat{\exists}_\delta \hat{T}_\gamma \hat{T}_\delta \right.$$

$$\left. \times \left\{ \begin{matrix} \exists_\gamma \delta & l_\pi & \exists_\alpha \beta \\ \exists_B & j_\gamma & j_\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} T_\gamma \delta & t_\pi & T_\alpha \beta \\ T_B & j_\gamma & j_\delta \end{matrix} \right\} [\exists_\gamma \delta | l_\pi | \exists_\alpha \beta] [T_\gamma \delta | t_\pi | T_\alpha \beta] \right|^2.$$

Jetzt werden aus den verbliebenen reduzierten Matrixelementen wieder dieselben Faktoren und Summen wie bereits bei der 2-N-Emission herausgezogen.

Damit hat man schließlich die Übergangswahrscheinlichkeit für die π -Absorption unter 1-N-Emission, wobei das zweite Nukleon unterhalb der Fermikante bleibt:

$$\begin{aligned}
 W = & (2\pi)^2 E_n E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} \frac{2}{m_\pi} G^2 (4\pi)^4 \hat{l}_\pi^{-2} \\
 & \times \sum_{l_Y} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \gamma\delta}} \left| \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \gamma\delta}} (-1)^{j_Y + i_Y + \gamma_Y + \delta_Y + 1 + \gamma_Y} \hat{\gamma}_Y \hat{\gamma}_B \hat{l}_Y \hat{l}_B \right. \\
 & \left. \begin{Bmatrix} \gamma_Y & l_\pi & \gamma_{\alpha\beta} \\ \gamma_B & j_Y & j_Y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_Y & t_\pi & \gamma_{\alpha\beta} \\ \gamma_B & \gamma_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} \right|^2 S.
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

S ist wie in (3.32) definiert.

Falls Teilchen "2" oberhalb der Fermikante eingebaut wird, lassen sich die Quantenzahlen $\alpha, \beta, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}$ sowie j_Y explizit angeben. Daher müssen die Summen über diese Quantenzahlen inkohärent erfolgen.

Mit Hilfe der Summenregel für die 6-j-Symbole läßt sich $\sum_{\exists \beta T_B}$ ausführen. Damit hat man die Übergangswahrscheinlichkeit für die π -Absorption unter 1-N-Emission, wobei das zweite Nukleon oberhalb der Fermikante gestreut wird:

$$W = (2\pi)^{-2} E_n E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} \frac{2}{m_\pi} G^2 (4\pi)^4 \hat{l}_\pi^{-2} \times \sum_{\substack{l_Y j_Y \\ l_Y j_Y}} \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists \alpha \beta T_{\alpha\beta} \\ \exists \gamma \delta T_{\gamma\delta}}} |S|^2. \quad (3.43)$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Übergangswahrscheinlichkeit nach entsprechender Modifikation des Phasenraums in die Formel (3.31) für die 2-N-Emission übergeht, wenn man das Teilchen 2 ins Kontinuum streut.

Spezifiziert man Formel (3.43) darauf, daß ein Proton p oder ein Neutron n emittiert wird, dann hat man:

$$W(t_Y) = (2\pi)^{-2} E_n E_{\text{recoil}} \frac{P_n}{E_{\text{initial}}} \frac{2}{m_\pi} G^2 (4\pi)^4 \hat{l}_\pi^{-2} \times \sum_{\substack{l_Y j_Y \\ l_Y j_Y}} \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \exists \alpha \beta T_{\alpha\beta}}} \sum_{\exists \gamma \delta T_B} \hat{T}_B^2 \begin{pmatrix} \gamma/2 & T_B & \gamma/2 \\ t_Y & M_{T_B} & \gamma \end{pmatrix} \times \left| \sum_{T_{Y\delta}} (-)^{T_{Y\delta}} \hat{T}_{Y\delta} \begin{Bmatrix} T_{Y\delta} & \gamma & T_{\alpha\beta} \\ T_B & \gamma/2 & \gamma/2 \end{Bmatrix} S \right|^2. \quad (3.44)$$

4. Ergebnisse

Die Diskussion der Ergebnisse befaßt sich im ersten Teil mit der Interpretation inklusive Reaktionen, wie sie bis in jüngste Zeit gemessen wurden. "Inklusive Reaktionen" bedeutet: Der Endzustand ist kinematisch nicht vollständig bestimmt. Beispiel: Das nn/pn-Emissionsverhältnis; dabei ist sowohl über die Energie- als auch über die Winkelverteilung der emittierten Nukleonen gemittelt. Mittelung über nichtbeobachtete Variable bedeutet aber Verlust von Information. Unsere Diskussion der inklusiven Reaktion beschäftigt sich zunächst mit dem Einfluß der Pionwellenfunktion auf die Ergebnisse. Da wir die Absorptionsvorgänge mikroskopisch berechnen, verwenden wir, wie bereits in Kapitel 3 dargelegt, zur Konstruktion der Pionwellenfunktion im Kerninnern nur den Realteil des optischen Potentials. Dadurch werden elastische Streuvorgänge des Pions an den Nukleonen vor seiner Absorption pauschal berücksichtigt. Auf Grund des Überlapps der Pionwellenfunktion mit dem Kern sind davon im wesentlichen nur die s-Wellen-Pionen betroffen. Wir benutzen in Kapitel 4.1.1 Wellenfunktionen, die nur durch das Coulomb-Potential eines punktförmigen Kernes bestimmt sind, also "wasserstoffähnliche" Wellenfunktionen, und in Kapitel 4.1.2 zusätzlich durch den

Realteil des Ericson-Potentials verzerrte Funktionen.
Wir stellen diese beiden Extreme ausführlich am Beispiel einer pionischen 1s-Wellenfunktion an ^{12}C gegenüber, weil die Effekte beträchtlich sind.

Während der Ausarbeitung dieser Arbeit deutete sich die Möglichkeit an, daß in nächster Zeit an den neuen "Pionenfabriken" die Messung "exklusiver" Reaktionen beginnen kann. "Exklusiv" bedeutet: Die Zerfallskanäle des hochangeregten hadronischen Systems Pion-Kern werden bestimmt und im gesamten kinematisch erlaubten Bereich gemessen. Es gibt bereits erste Daten (Bass 76, Dey 76, Engf 76) auf diesem Gebiet, die allerdings noch nicht vollständig sind. In Kapitel 4.2 wird an ausgewählten Beispielen der Einfluß einiger Modellannahmen auf die Ergebnisse gezeigt.

4.1 Beschreibung inklusiver Reaktionen

Vorbemerkung zu den Kapiteln 4.1.1 und 4.1.2 :

In Kapitel 4.1.1 werden wasserstoffähnliche 1s-Pion-Wellenfunktionen verwendet, d.h. die Pion-Wellenfunktion entsteht als Lösung zu einem punktförmigen Coulomb-Potential der Form

$$V_{cb} = -Ze^2/r \quad (4.1)$$

In Kapitel 4.1.2 wird der Realteil des optischen Potentials nach Ericson (s. Formel (2.1)) hinzugenommen; ebenso werden Effekte der Vakuumpolarisation berücksichtigt. Die Pion-Wellenfunktion wird numerisch durch Lösen der Klein-Gordon-Gleichung gewonnen (Tau 72).

In Figur 4.1 sind die beiden Wellenfunktionen gegenübergestellt. Wie man sieht, unterscheidet sich die distortierte Wellenfunktion im Kerninnern beträchtlich von der Coulomb-Wellenfunktion. Die Absenkung der verzerrten Wellenfunktion bei kleinen Abständen rührt von der Repulsion der starken Wechselwirkung für s-Wellenpionen her. Beachtet man, daß in unseren Wechselwirkungsoperator die Ableitung der Wellenfunktion eingeht, wird verständlich, daß die Form der Pion-Wellenfunktion im Kerninnern einen kritischen Punkt darstellt.

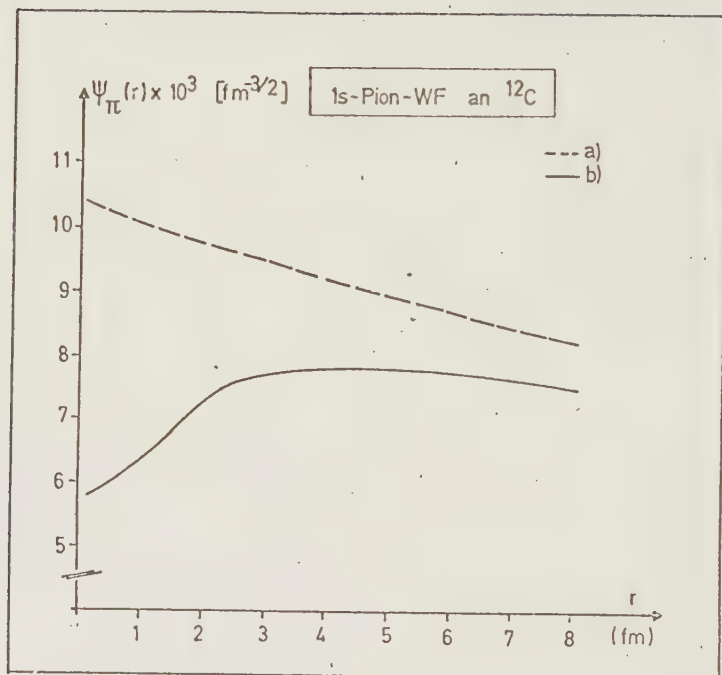


Fig. 4.1: 1s-Pionwellenfunktion an ^{12}C .

Kurve a) Coulombwellenfunktion eines punktförmigen ^{12}C -Kernes.

Kurve b) durch den Realteil des Ericson-Potentials zusätzlich verzerrte Wellenfunktion.

4.1.1 Ergebnisse mit wasserstoffähnlichen Wellenfunktionen

In den folgenden Figuren ist der Wert des Impulstransfers als freier Parameter aufzufassen. Nach Überlegungen, die einen expliziten Pionenaustausch zwischen den korrelierten Nukleonen annehmen, sollte zur Wiedergabe der experimentellen Werte ein Impulsübertrag nötig sein, der in der Nähe von 300 MeV/c liegt (Hel 74).

In der Fig.4.2 ist als durchgehende Linie a) die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit unter 2-Nukleon-Emission aufgetragen. Die Linien b) und c) sind die partiellen Übergangsbreiten für nn- bzw. pn-Emission. Die entsprechenden experimentellen Werte sind mit Exp. 3 bzw. Exp. 4 bezeichnet. Der experimentelle Wert für die totale Breite (Exp. 1) für das pionische 1s-Niveau an ^{12}C wird von der Kurve a) zweimal geschnitten. Der untere Schnittpunkt bei $q \approx 170$ MeV/c wird bei den weiteren Diskussionen außeracht gelassen. Er entspricht einer Korrelationslänge von mehr als 3,5 fm. Dieser Wert ist größer als der mittlere Nukleonabstand und selbst größer als der Kernradius von ^{12}C . Im Rahmen des hier benutzten 2-Nukleonen-Clustermodells ist der untere Schnittpunkt also konsequenterweise auszuscheiden. Ein solcher Impulsbetrag ist auch aus dynamischen Gründen sehr unwahrscheinlich.

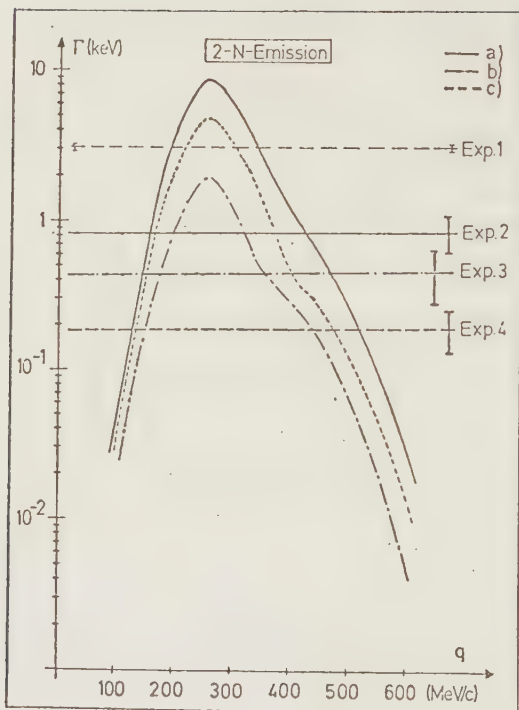


Fig. 4.2: Totale Übergangswahrscheinlichkeit, aufgetragen über dem Impuls q .

- | | | | |
|----------|--|---------|--|
| Kurve a) | totale Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{2N} für 2-Nukleon-Emission. | Exp. 1) | totale Absorptionswahrscheinlichkeit von 1s-Pionen an ^{12}C (Tau 74). |
| Kurve b) | Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{nn} für Neutron-Neutron-Emission. | Exp. 2) | Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter 2-Nukleonen-Emission (Nord 68). |
| Kurve c) | Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{pn} für Proton-Neutron-Emission. | Exp. 3) | Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter Neutron-Neutron-Emission (Nord 68). |
| | | Exp. 4) | Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter Proton-Neutron-Emission (Nord 68). |

Der Impulsübertrag beim oberen Schnittpunkt mit $q \approx 350$ MeV/c ist mit dem Modell verträglich. Neuere experimentelle Arbeiten, in denen die bei der Pion-Absorption herausfliegenden Nukleonen spektroskopiert werden, zeigen, daß an leichteren Kernen nur in etwa 40% der Fälle korrelierte Nukleonenpaare emittiert werden; bei ^{12}C sind es gar nur etwa 25% (Exp. 2). Nimmt man diesen experimentellen Wert zum Vergleich her, so ergibt sich ein Korrelationsimpuls $q \approx 400$ MeV/c. Für einen Korrelationsimpuls $q \approx 300$ MeV/c deckt sich die hier berechnete Übergangsbreite mit der mit Hilfe des Rescattering-Modells gewonnenen Breite (Hel 74).

Aus den Kurven b) und c) läßt sich das nn/pn-Verhältnis erhalten. Es liegt nach Fig. 4.3 durchwegs innerhalb der experimentellen Fehlerbreiten.

Um den Effekt bei der Benutzung von unverzerrten und durch das optische Potential verzerrten Pionwellenfunktionen zu verstehen, wurden die Beiträge der beiden Gradientenoperatoren im Chew-Low-Hamiltonian $H_{CL} \sim (\vec{\nabla}_\pi - \frac{m_\pi}{m_N} \vec{\nabla}_N) \cdot \vec{\sigma}$ einzeln berechnet. Bei den Kurven b) und c) der Fig. 4.4 ist der Term proportional zu $\vec{\nabla}_N$ bzw. zu $\vec{\nabla}_\pi$ jeweils weggelassen. Die Interferenz zwischen den beiden Termen ist konstruktiv, wie ein Vergleich mit der kohärenten Summe a) der beiden Beiträge zeigt. Gebraucht man andersartige Pionwellenfunktionen, so wird sich dies hauptsächlich im Beitrag proportional zu $\vec{\nabla}_\pi$ (Kurve b)) äußern.

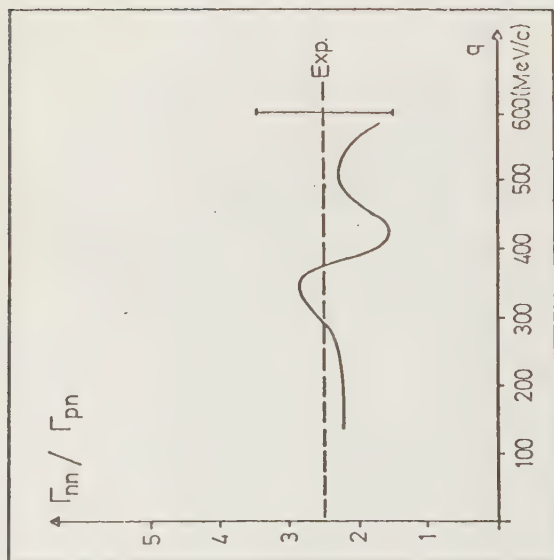


Fig. 4.3: Verhältnis von Neutron-Neutron- zu Proton-Neutron-Emission.
Experimenteller Wert aus Nord 68.

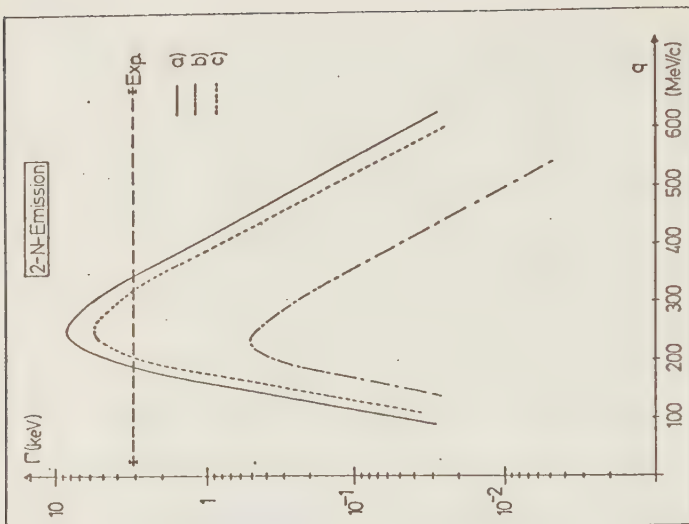


Fig. 4.4: Totale Übergangswahrscheinlichkeit. Statistische und nichtstatistische Beiträge aus dem Chew-Low-Operator $H_{LN} \sim \vec{\nabla}_N - \frac{m_N}{m_N} \vec{\nabla}_N$.

Kurve a) totale Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{2N} für 2-Nukleonen-Emission (wie Fig. 4.2a)

Kurve b) Es trägt nur der Term $\sim \vec{\nabla}_N$ bei, $\vec{\nabla}_N$ ist abgeschaltet.

Kurve c) Es trägt nur der Term $\sim \vec{\nabla}_N$ bei, $\vec{\nabla}_N$ ist abgeschaltet.

Experimenteller Wert aus Tau 74 (wie in Fig. 4.2)

Durch Beobachten des Pionabsorptionsprozesses hofft man einerseits, Details über die Gestalt der Pion-Nukleon-Wechselwirkung im Kern und andererseits über die Struktur des Kernes selbst zu erfahren, da durch das Pion Kernzustände angeregt werden, die durch Nukleon-Kern-Streuung nicht erreichbar sind. Um solche Zustände zu analysieren, muß man die bei der Absorption emittierten Nukleonen spektroskopieren. Leider gibt es bisher noch nicht hinreichend viele und gesicherte experimentelle Daten. Zwei der neueren experimentellen Arbeiten werden zu den nächsten Figuren herangezogen.

Wir behandeln zuerst die Zwei-Nukleonen-Emission. In Fig. 4.5 ist das Neutronenspektrum mit dem Proton in Koinzidenz aufgetragen. Bei der durchgehenden Kurve a) ist die np-Rate über der Energie des Neutrons dargestellt, wie es dem Experiment entspricht. Zum Vergleich wurde als gestrichelte Kurve b) die Emissionsrate für den Fall eingezeichnet, daß man das Proton spektroskopiert. Beide Kurven liegen in der absoluten Größenordnung des Experiments. In Fig. 4.6 ist das Protonenspektrum mit dem Neutron in Koinzidenz aufgetragen. Die Linie a) zeigt das Protonenspektrum, die Linie b) das Neutronenspektrum.

Mißt man im Experiment die Energien beider emittierter

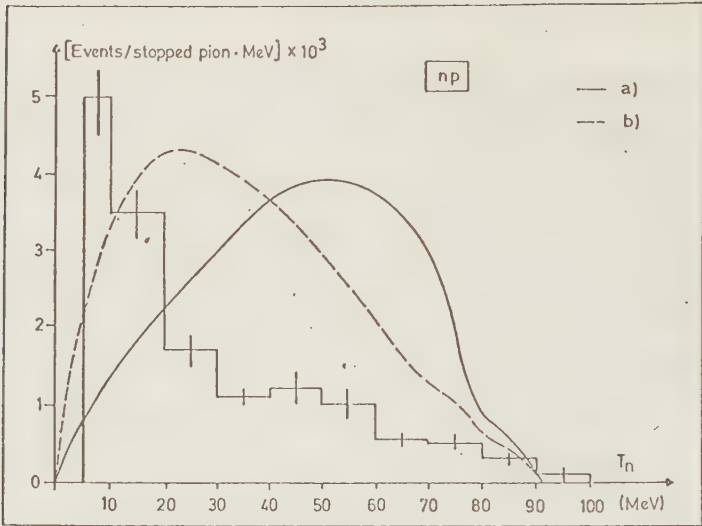


Fig. 4.5: Neutronspektrum mit dem Proton in Koinkizenz (Lee 72)

Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt

330 MeV/c.

Kurve a) Neutronspektrum Kurve b) Protonenspektrum

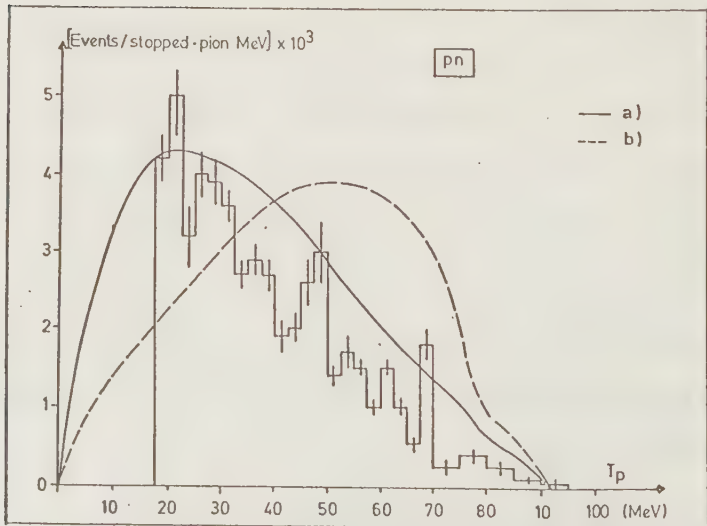


Fig. 4.6: Protonenspektrum mit dem Neutron in Koinkizenz (Lee 72)

Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt

330 MeV/c.

Kurve a) Protonenspektrum Kurve b) Neutronspektrum

Nukleonen, so kann man angeben, aus welcher Schale sie stammten. Die Fig.4.7 zeigt Experiment und Rechnung, aufgetragen über der Energie eines der Nukleonen. Es ist zu bemerken, daß die Kurven jeweils am zweiten Meßpunkt in der Größenordnung angepaßt wurden. Der für die Rechnung geeignetste Impulsübertrag q betrug 330 MeV/c.

Eine andere experimentelle Möglichkeit, die Schalen zu bestimmen, besteht darin, den zurückbleibenden Restkern selbst zu untersuchen. Im vorliegenden Experiment (Cou 76), dem ersten seiner Art, wird mit dieser Methode die Emissionsrate für pn-Paare aus der $1p_{3/2}$ -Schale in ^{13}C und die Emissionsrate für Protonen aus der $1p_{3/2}$ -Schale in ^{12}C gemessen. In beiden Fällen ist der Restkern ein ^{11}Be -Kern im niedersten Anregungszustand. Für die Rechnung ist es unerheblich, daß der Ausgangskern im ersten Fall ^{13}C ist: das 7. Neutron nimmt im vorliegenden Experiment nur eine Zuschauerstellung ein. Fig. 4.8 zeigt im oberen Teil den Fall für die pn-Emission, im unteren Teil den Fall für die p-Emission.

Die "Beugungsstruktur" in der Kurve 4.8b entsteht nicht durch Kernstruktur, sondern wird durch Interferenzeffekte der beiden Gradiententerme im Chew-Low-Hamiltonian hervorgerufen. Man ersieht dies bei Verwendung einer realistischen Pionwellenfunktion aus der Figur 4.17b (s.u.),

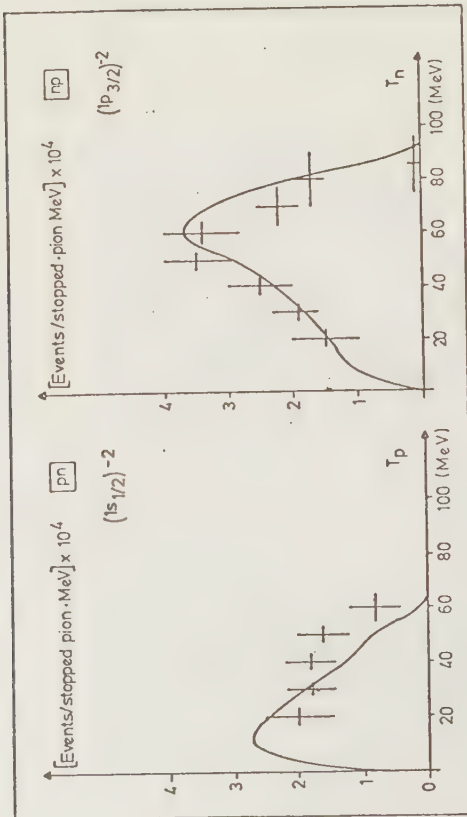


Fig. 4.7: Nukleonspektren für den $(1s_{1/2})^{-2}$ - und $(1p_{3/2})^{-2}$ -Lochzustand von ^{12}C , aufgetragen über der Energie eines Nukleons. Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt 330 MeV/c. Die Kurven wurden jeweils am zweiten Meßpunkt angepaßt.
Experimentelle Werte aus Lee 72.

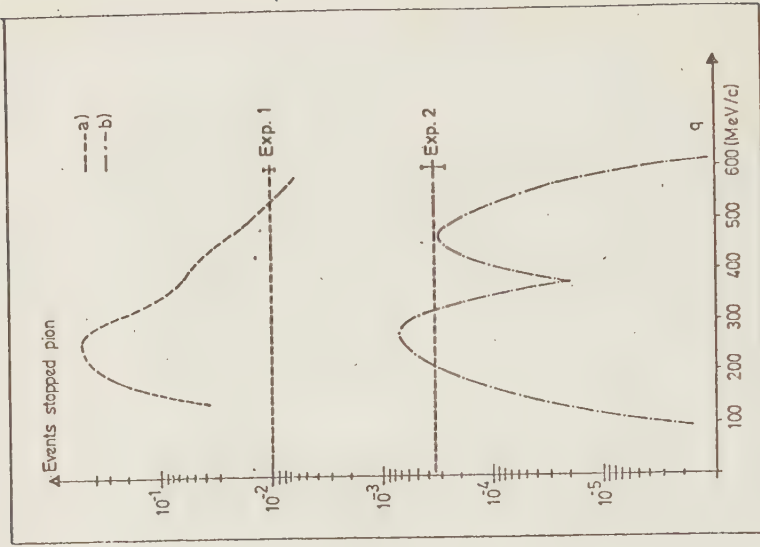
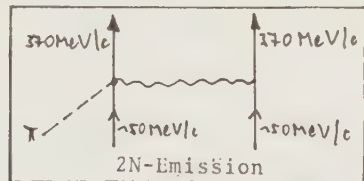
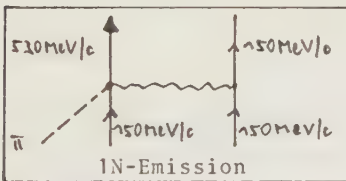


Fig. 4.8: Proton- und Proton-Neutron-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale in ^{12}C .

Kurve a) Proton-Neutron-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale.
Kurve b) Proton-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale.
Exp. 1) Emissionswahrscheinlichkeit W_{pn} für die Reaktion $^{13}\text{C}(\pi^-, pn)^{11}\text{B}_{\text{gnd}}$ (Cou 76).
Exp. 2) Emissionswahrscheinlichkeit W_p für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^-, p)^{11}\text{B}_{\text{gnd}}$ (Cou 76).

Die in der Figur 4.8 für die Wiedergabe der experimentellen Werte notwendigen Impulse q erscheinen aus oben schon dargelegten Erwägungen als zu hoch. Da zu erwarten ist, daß für 2-N- und 1-N-Emission verschiedene Impulsüberträge angesprochen werden, ist es auch verständlich, wenn das Verhältnis dieser Emissionsraten durch einen einzigen Impuls nicht gut reproduziert wird. Das Auftreten verschieden großer Impulsüberträge sei anhand der folgenden Skizze kurz erläutert: Sehen



wir für den Zweck der Abschätzung von den Bindungsenergien der Nukleonen ab, so steht den herausfliegenden Nukleonen eine kinetische Energie $T = m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$ zur Verfügung. Im Falle der 1N-Emission entspricht dies einem freien Nukleonenimpuls von etwa 530 MeV/c , im Falle der 2N-Emission einem Impuls von etwa 370 MeV/c pro Nukleon. Da die gebundenen Nukleonen im Schnitt einen Impuls von je etwa 150 MeV/c besitzen, ist - im günstigsten Fall, wenn die Nukleonen vor dem Stoß bereits antiparallel auseinanderlaufen - für die 1N-Emission ein Impulsübertrag von etwa 380 MeV/c nötig, für die 2N-Emission hingegen nur etwa 220 MeV/c .

Schließlich sind in den beiden folgenden Bildern Fig. 4.9; 4.10 noch 1-N-Prozesse berechnet, für die bisher keine experimentellen Daten existieren. Da in unserem Modell immer zwei Nukleonen am Prozeß beteiligt sind, muß man bei der 1-N-Emission unterscheiden, wo das zweite Nukleon eingebaut wird. Entweder wird es oberhalb der Fermikante des Kerns eingebaut (Fig. 4.9), oder es sucht sich einen Platz unterhalb der Fermikante (Fig. 4.10) unter Beachtung des Pauliprinzips.

Kurz zusammenfassend läßt sich feststellen: die berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten liefern beim Vergleich mit dem Experiment im allgemeinen einen relativ hohen Impulsübertrag zwischen den Nukleonen. Dies ist nicht eine Folge des verwendeten Wechselwirkungsoperators oder des Korrelationsmodells, sondern der zur Vereinfachung benutzten wasserstoffähnlichen Pion-Wellenfunktionen. Distortierte Pion-Wellenfunktionen verkleinern den Impulsübertrag.

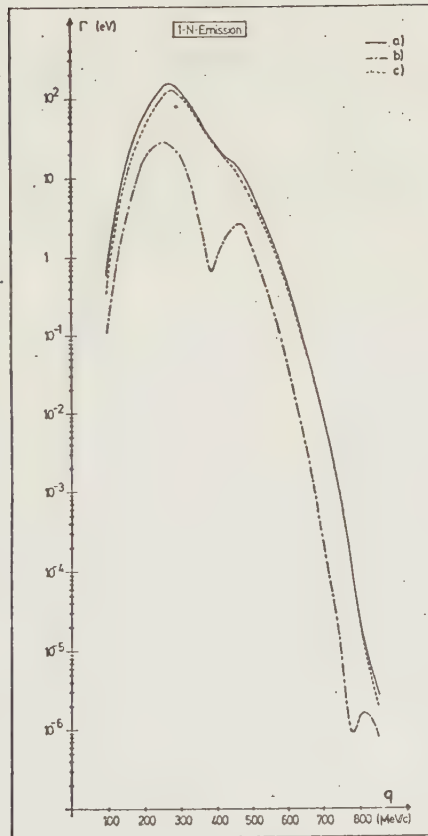


Fig. 4.9: Absorptionsraten unter 1-Nukleon-Emission, wobei das zweite an der Reaktion beteiligte Nukleon oberhalb der Fermikante des Kernes eingebaut wird.
 Kurve a) Proton- und Neutron-Emission zusammen
 Kurve b) Proton-Emission
 Kurve c) Neutron-Emission.

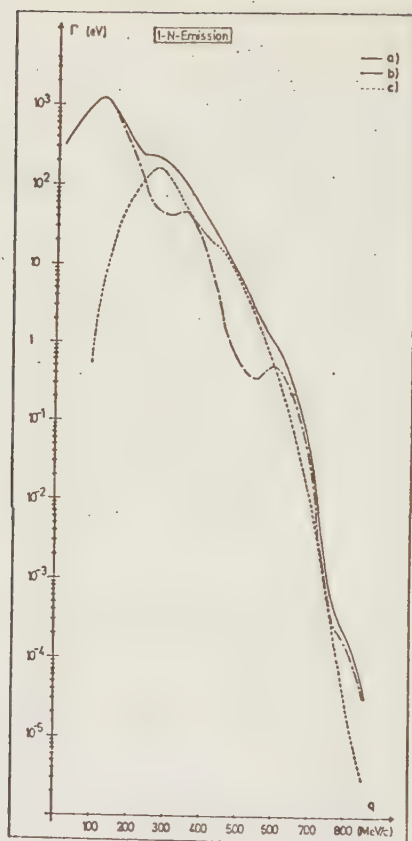


Fig. 4.10: Absorptionsraten unter 1-Nukleon-Emission, wobei das zweite an der Reaktion beteiligte Nukleon sowohl oberhalb als auch unterhalb der Fermikante des Kernes eingebaut wird.

Kurve a) totale Absorptionsrate unter 1-N-Emission.

Kurve b) das zweite Nukleon wird unterhalb der Fermikante eingebaut.

Kurve c) das zweite Nukleon wird oberhalb der Fermikante eingebaut.

4.1.2 Ergebnisse mit distortierten Pionwellenfunktionen

In den nun folgenden Figuren sind diesselben Größen wie im vorigen Abschnitt berechnet. Der einzige Unterschied zu obigem besteht in der Verwendung realistischer, durch den Realteil des optischen Pion-Kern-Potentials verzerrter Pionwellenfunktionen.

Die Fig.4.11 zeigt wieder die totalen Übergangswahrscheinlichkeiten für 2-N-Emission sowie die zugehörigen Anteile an nn- und pn-Paaren. Beim Vergleich mit Fig. 4.2 fällt sofort die kleinere Größenordnung der Kurven auf. Die totale Übergangsrate a) liegt jetzt etwa einen Faktor 2 unter dem Experiment 1. Allerdings beinhaltet das Experiment 1 auch Absorptionsprozesse, denen keine korrelierte 2-N-Emission folgt. Man muß unser Modell daher mit dem Experiment vergleichen, in dem speziell korrelierte 2-N-Ereignisse gemessen wurden. Exp. 3 und Exp. 4 sind solche Meßergebnisse für nn- bzw. pn-Emission. Der dem Experiment gemäße Korrelationsimpuls beträgt laut Zeichnung knapp 250 MeV/c.

Das Verhältnis von nn- zu pn-Emission wird nach Fig. 4.12 durch die verzerrten Pionwellenfunktionen gegenüber der Fig. 4.3 nur qualitativ verändert. Es befindet sich ebenfalls innerhalb des experimentellen Fehlers. Eine Ab-

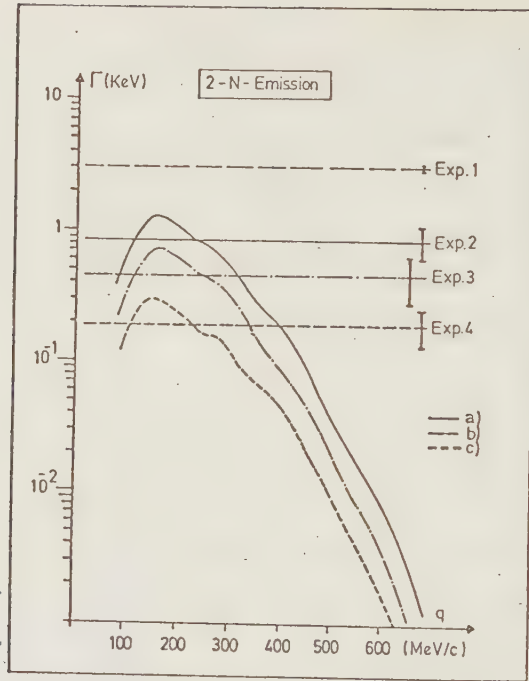


Fig. 4.11: Totale Übergangswahrscheinlichkeit, aufgetragen über dem Impuls q .

- | | |
|---|--|
| Kurve a) totale Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{NN} für 2-Nukleon-Emission. | Exp. 1) totale Absorptionswahrscheinlichkeit von 1s-Pionen an ^{12}C (Tau 74). |
| Kurve b) Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{nn} für Neutron-Neutron-Emission. | Exp. 2) Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter 2-Nukleonen-Emission (Nord 68). |
| Kurve c) Übergangswahrscheinlichkeit Γ_{pn} für Proton-Neutron-Emission. | Exp. 3) Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter Neutron-Neutron-Emission (Nord 68). |
| | Exp. 4) Absorptionswahrscheinlichkeit unter korrelierter Proton-Neutron-Emission (Nord 68). |

schätzung des Verhältnisses läßt sich leicht erhalten, wenn man beachtet, daß vor der Absorption des negativen Pions jedes nn-Paar ein pn-Paar war und jedes pn-Paar ein pp-Paar. Das Abzählen der Paare in ^{12}C bringt ein Verhältnis von 2,4. In der konkreten Rechnung ergeben sich Abweichungen von dieser Abschätzung, die darin begründet liegen, daß man die Abschätzung für alle Schalenkombinationen der Nukleonen getrennt ausführen und die damit erhaltenen Verhältniszahlen noch durch die Ortsraummatrixelemente in Abhängigkeit von q wichten müßte.

Anhand der Fig.4.13 wird deutlich, weshalb verzerrte Pionwellenfunktionen die Übergangswahrscheinlichkeiten gegenüber unverzerrten Pionwellenfunktionen reduzieren. Dazu vergleichen wir mit den entsprechenden Kurven der Fig.4.4 und sehen uns die Gestalt der Pionwellenfunktionen in Fig.4.1 an. Zunächst fällt auf, daß die Interferenz zwischen den beiden Gradiententermen des Hamiltonians von konstruktiv zu destruktiv wechselt, da die Ableitung der realistischen Pionwellenfunktion (Fig.4.1a) im Bereich des Kerns ein anderes Vorzeichen hat als die reine Coulomb-Wellenfunktion (Fig.4.1b). Die Anhebung des Terms proportional zu $\vec{\nabla}_\pi$ in Fig.4.13b gegenüber Fig.4.4b ist auf die betragsmäßig größere Ableitung der distortierten Pion-

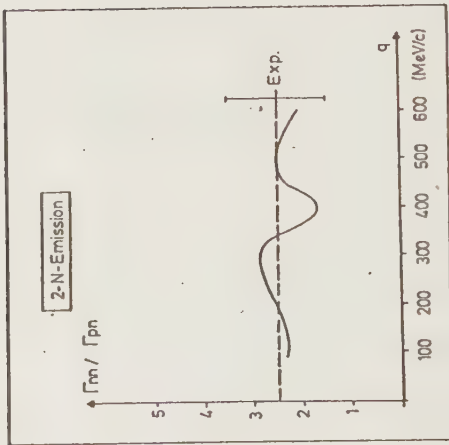


Fig. 4.12: Verhältnis von Neutron-Neutron- zu Proton-Neutron-Emission.
Experimenteller Wert aus Nord 68.

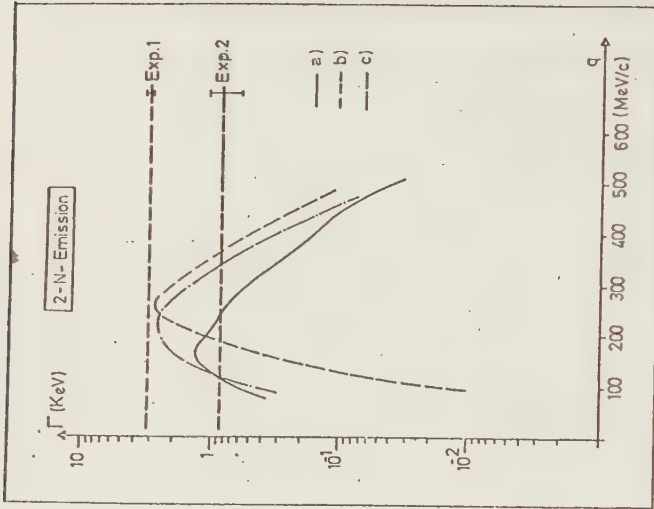


Fig. 4.13: Totale Übergangswahrscheinlichkeit. Statische und nichtstatische Beiträge aus dem Chew-Low-Operator $H_{CL} \sim \vec{\nabla}_N - \frac{m_N}{m_N} \vec{\nabla}_N$.
Kurve a) totale Übergangswahrscheinlichkeit Γ_N für 2-Nukleonen-Emission (wie Fig. 4.11a).
Kurve b) Es trägt nur der Term $\sim \vec{\nabla}_N$ bei, $\vec{\nabla}_N$ ist abgeschaltet.
Kurve c) Es trägt nur der Term $\sim \vec{\nabla}_N$ bei, $\vec{\nabla}_N$ ist abgeschaltet.
Experimenteller Wert aus Tau 74 (wie in Fig. 4.11)

wellenfunktion im Bereich bis ca. 2,5 fm zurückzuführen. Die Absenkung des Termes proportional zu $\vec{\nabla}_N$ folgt unmittelbar aus der Absenkung der distortierten Pionwellenfunktion gegenüber der unverzerrten.

Das Absinken der totalen Übergangswahrscheinlichkeiten spiegelt sich auch mehr oder weniger in den partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten wieder. In der Fig.4.14 ist das Neutronenspektrum mit dem Proton in Koinzidenz gezeichnet, in Fig.4.15 das Protonenspektrum mit dem Neutron in Koinzidenz. Wiederum ist zum Vergleich auch das Spektrum des jeweilig anderen Teilchens eingezeichnet. Hier und in den folgenden Bildern beträgt der geeignetste Korrelationsimpuls $q \approx 270$ MeV/c. Da bei niederen Nukleonenenergien das experimentelle Spektrum viele Nukleonen enthält, die hauptsächlich von Verdampfungsprozessen herrühren (Lee 72), ist die Diskrepanz zwischen Rechnung und Experiment bei kleinen Teilchenenergien nicht verwunderlich.

Bei der Spektroskopierung von beiden Nukleonen erwartet man, daß mit zunehmender Schärfe der experimentellen Definition von "Emission zweier korrelierter Nukleonen aus einer Schale" immer mehr Zählereignisse außer acht gelassen werden müssen. So ist es wohl zu erklären, wenn zwar in den Fig.4.14 und 4.15 Experiment und

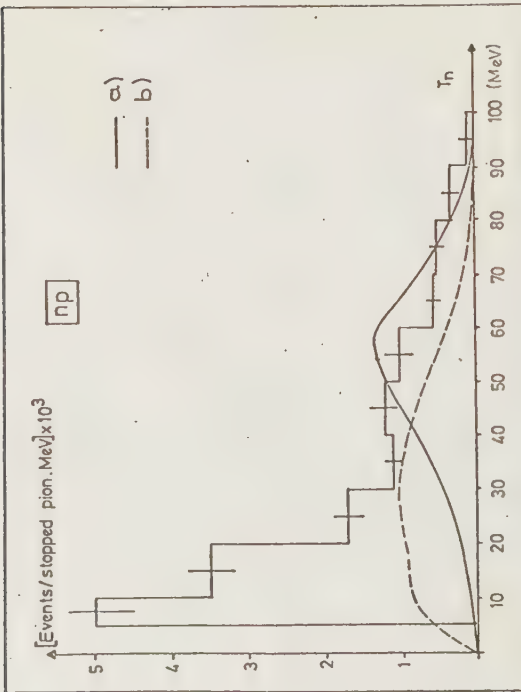


Fig. 4.14 : Neutronenspektrum mit dem Proton in Koinzidenz (Lee 72)

Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt

270 MeV/c.

Kurve a) Neutronenspektrum

Kurve b) Protonenspektrum

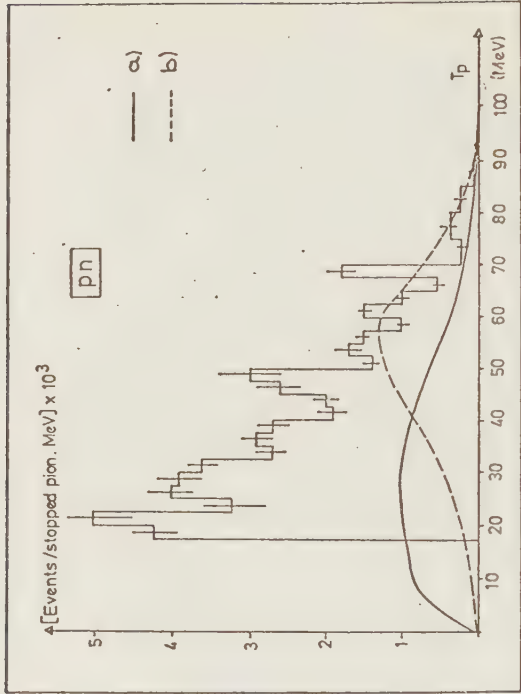


Fig. 4.15 : Protonenspektrum mit dem Neutron in Koinzidenz (Lee 72)

Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt

270 MeV/c.

Kurve a) Protonenspektrum

Kurve b) Neutronenspektrum

Rechnung in der gleichen Größenordnung liegen, nicht jedoch in der Fig.4.16. Die Rechnung wurde willkürlich am zweiten Meßpunkt angepaßt. Der Anpassungsfaktor beträgt für pn-Emission aus der $1s_{1/2}$ -Schale ca. 0,33 und für die $1p_{3/2}$ -Schale ca. 0,25. Daraus ist im Rahmen des hier verwendeten Modells zu schließen, daß ein Großteil der emittierten Nukleonenpaare aus dem elastischen Kanal herausgestreut wird. Ein verbessertes Modell sollte daher ein komplexes optisches Potential für die herauslaufenden Nukleonen enthalten. Da bei den experimentellen Daten der Fig.4.16 nicht herauszufinden war ob sie über der Protonen- oder der Neutronenenergie aufgetragen wurden, wurde für den Vergleich mit der Rechnung, der jeweils geeignetere Fall herausgesucht, und der andere gestrichelt eingezeichnet.

Als Ergänzung dazu sind in Tab.4.1 für einen typischen Korrelationsimpuls $q = 270 \text{ MeV/c}$ die prozentualen Anteile der Schalen und Nukleonenpaare zur totalen 2-N-Emission angegeben. Diese Zahlen stimmen mit den spärlich vorhandenen experimentellen Werten (Lee 72) nicht gut überein. Jedoch deuten die großen experimentellen Fehlerbreiten an, daß die Messungen durchaus noch verbessert werden können.

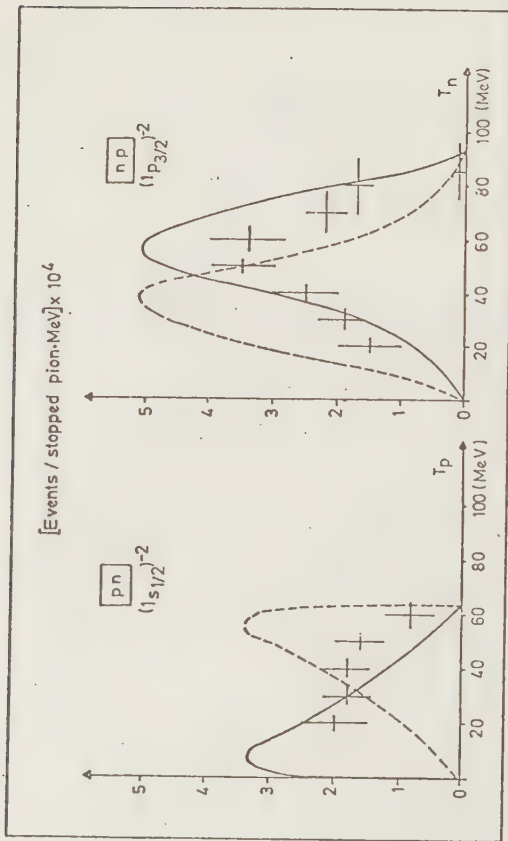


Fig. 4.16 : Nukleonspektren für den $(1s_{1/2})^{-2}$ und $(1p_{3/2})^{-2}$ Lochzustand von ^{12}C , aufgetragen über der Energie eines der beiden Nukleonen. Der Korrelationsimpuls in der Rechnung beträgt 270 MeV/c. Die Kurven wurden am zweiten Meßpunkt willkürlich angepaßt.
Experimentelle Werte aus Lee 72.

$\text{Zu } (1s_{1/2})^{-2}$: Kurve a) Proton-Neutron-Emissionswahrscheinlichkeit aufgetragen über der Protonenenergie. Anpassungsfaktor ca. 0,33.
Kurve b) Proton-Neutron-Emissionswahrscheinlichkeit aufgetragen über der Neutronenenergie. Anpassungsfaktor ca. 0,33.

$\text{Zu } (1p_{3/2})^{-2}$: Kurve a) Proton-Neutron-Emissionswahrscheinlichkeit aufgetragen über der Neutronenenergie. Anpassungsfaktor ca. 0,25.
Kurve b) Proton-Neutron-Emissionswahrscheinlichkeit aufgetragen über der Protonenenergie. Anpassungsfaktor ca. 0,25.

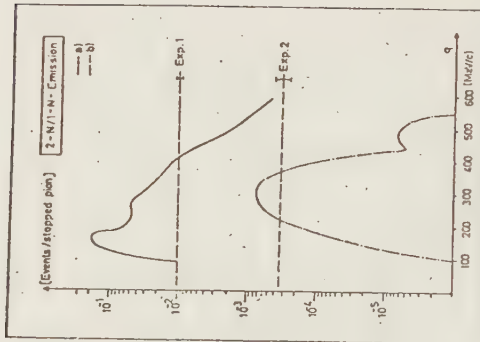


Fig. 4.17 : Proton- und Proton-Neutron-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale in ^{12}C .

Kurve a) Proton-Neutron-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale.
Kurve b) Proton-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale.
Exp. 1) Emissionswahrscheinlichkeit W_{pn} für die Reaktion $^{13}\text{C}(\pi^-, pn)^{11}\text{Be}_{\text{bind}}$ (Cou 76).
Exp. 2) Emissionswahrscheinlichkeit W_p für die Reaktion $^{12}\text{C}(\pi^-, p)^{11}\text{Be}_{\text{bind}}$ (Cou 76).

Schalen Nukleonen- paare	$(ss)^{-1}$	$(sp)^{-1}$	$(pp)^{-1}$	alle Schalen
pn	2,4%	18,6%	21,0%	42,2%
nn	3,8%	26,4%	28,5%	57,8%
$pn \oplus nn$	6,2%	44,9%	49,4%	100%

Tabelle 4.1

Relative Anteile der emittierten (pn)- und (nn)-Nukleonen-
paare aus den einzelnen Schalen zur totalen 2N-Emission.
Korrelationsimpuls $q = 270 \text{ MeV/c}$.

Die Fig.4.17 zeigt einen Vergleich von 2-N- und 1-N-Emission aus der $1p_{3/2}$ -Schale. Es läßt sich daraus ein interessantes Detail ablesen. Der Schnittpunkt von Rechnung und Experiment ergibt für die 2-N-Emission einen größeren Impulsübertrag q als für die 1-N-Emission. Das ist verständlich: Nimmt man symmetrische Energieaufteilung und einen Emissionswinkel von 180° für die korrelierten Nukleonen an, so haben sie für gegebene Gesamtenergie einen Relativimpuls, der betragsmäßig größer ist als der Impuls eines einzigen Nukleons mit derselben Energie (s. dazu auch die entsprechende Diskussion zu Fig. 4.8).

Die Fig.4.18 bringt das Verhältnis 2N/1N - Emission aus der Fig.4.17. Die im vorigen Absatz erwähnten verschieden großen Impulsüberträge für 2-N- und 1-N-Emission dürften - in der Sprache des hier verwendeten Modells - die Ursache dafür sein, daß dieses Verhältnis nicht so groß ist wie man erwartet, sondern nur in der Gegend von 30 ist.

Schließlich sind in den Fig.4.19 und 4.20 noch 1-N-Emissionsraten gezeigt für die Fälle, wo das zweite an der Reaktion beteiligte Nukleon oberhalb bzw. unterhalb der Fermikante sitzen bleibt. Was die Struktur angeht, so stammt sie in erster Linie von der Interferenz der

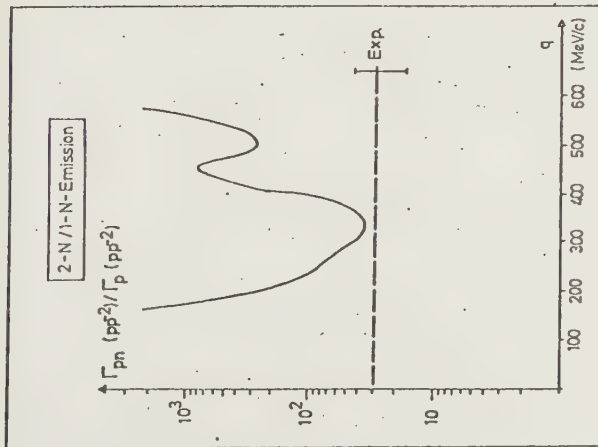


Fig. 4.18: Verhältnis von Proton-Neutron- zu Proton-Emission aus Fig. 17).
Experimenteller Wert aus Cou 76.

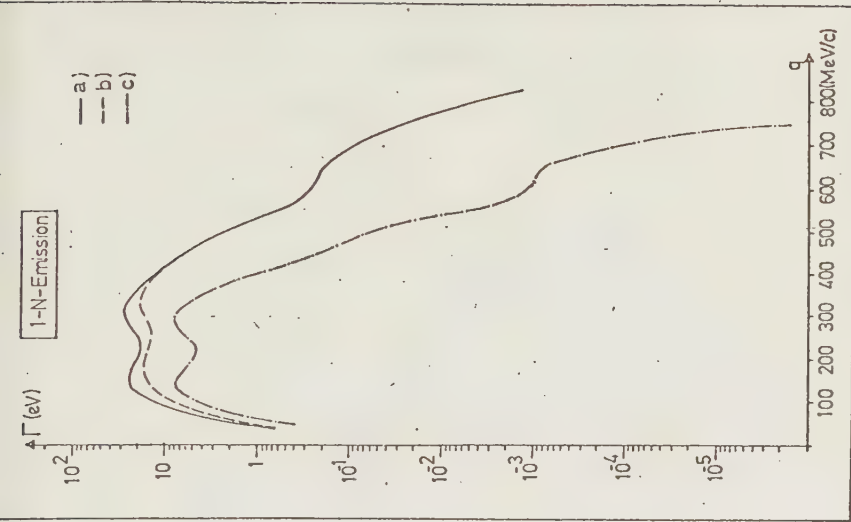


Fig. 4.19: Absorptionsraten unter 1-Nukleon-Emission, wobei das zweite an der Reaktion beteiligte Nukleon oberhalb der Fermikante des Kernes eingebaut wird.
Kurve a) Proton- und Neutron-Emission zusammen
Kurve b) Proton-Emission

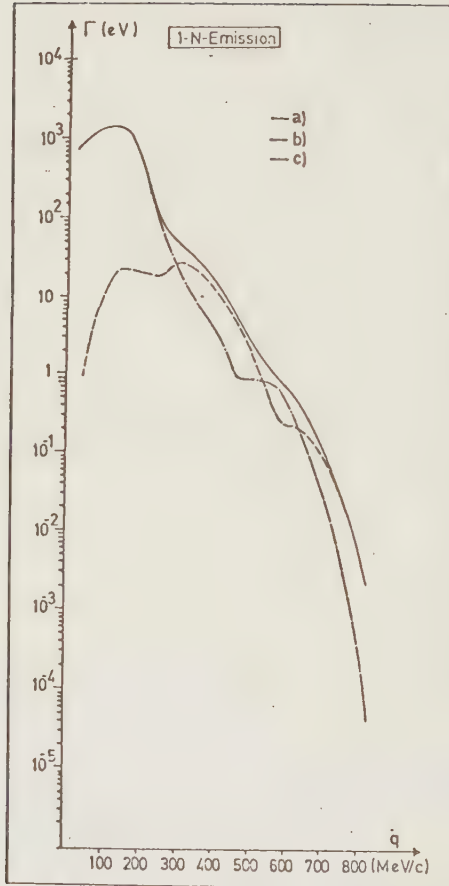


Fig. 4.20: Absorptionsraten unter 1-Nukleon-Emission, wobei das zweite an der Reaktion beteiligte Nukleon sowohl oberhalb als auch unterhalb der Fermikante des Kernes eingebaut wird.

Kurve a) totale Absorptionsrate unter 1-N-Emission.

Kurve b) das zweite Nukleon wird unterhalb der Fermikante eingebaut.

Kurve c) das zweite Nukleon wird oberhalb der Fermikante eingebaut.

beiden Gradiententerme des Hamiltonians und erst in zweiter Linie von der Kernstruktur bzw. den Details der Korrelationsfunktion zwischen den Nukleonen.

Zusammenfassend ist zu bemerken:

- (i) Die betrachteten Prozesse sind sensitiv auf die detaillierte Struktur des verwendeten Hamiltonians. D.h. es lassen sich Schlüsse ziehen über die Bedeutung nichtstatistischer Effekte ($\sim \vec{\nabla}_N$) in der Pion-Nukleon-Wechselwirkung.
- (ii) Der Gebrauch von Pionwellenfunktionen, die durch das Ericson-Potential verzerrt sind, verbessert die Übereinstimmung mit dem Experiment gegenüber unverzerrten Funktionen.
- (iii) Das hier verwendete Modell für Nukleonenkorrelationen ist in der Lage, neuere inklusive Daten, sowohl in qualitativer, als auch in semiquantitativer Hinsicht wiederzugeben.

4.1.3 Zusammenfassung über die Beschreibung inklusiver Reaktionen

Die beiden letzten Abschnitte haben folgendes gezeigt: Es ist mit unserem Modell möglich, inklusive Daten befriedigend zu erklären. Inklusive Reaktionen bieten zwar nicht die Fülle von Informationen um die verschiedenen Annahmen eines mikroskopischen Modells im einzelnen festzulegen. Sie sind jedoch geeignet, ein zumindest qualitatives Verständnis der beteiligten Reaktionsmechanismen zu ermöglichen. Einen entscheidenden Hinweis auf die Güte des verwendeten Modells liefert die Wiedergabe der totalen Breiten eines pionischen Energieniveaus. Dies ist in Anbetracht der einfachen Struktur unseres Modells überraschend. Es zeigt, daß das hier angewandte Modell für den Impulstransfer zwischen zwei Nukleonen bereits die wesentlichen Aspekte der π -NN-Wechselwirkung enthält. Ein weiterentwickeltes Korrealtionsmodell, das im Hinblick auf eine mesonentheoretische Behandlung der Pion-Rückstreuung daneben noch eine ausgeprägte Spin- und Isospinstruktur aufweist, sollte eine quantitativ bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erwarten lassen. Allerdings ist zum Test

dieser Verfeinerungen die Wiedergabe der Breiten allein nicht sehr geeignet.

Die mit dem einfachen Korrelationsmodell erzielten Resultate bei inklusiven Reaktionen, ermutigen uns, die Rechnungen auf die Beschreibung exklusiver Reaktionen auszudehnen. Das soll im folgenden Abschnitt an einem ausgewählten Beispiel illustriert werden.

4.2 Beschreibung exklusiver Reaktionen

Im vorangehenden Abschnitt hatten wir anhand der wichtigsten vorhandenen Daten über inklusive Reaktionen versucht, im Rahmen unseres Modells einige Aussagen über Reaktionsmechanismen und Kernstruktur zu gewinnen. Abgesehen von der totalen Absorptionsbreite, die sehr sorgfältig und systematisch gemessen wurde, sind die anderen experimentellen Daten, wie z.B. das nn/pn -Verhältnis oder das $1N/2N$ -Verhältnis, die bereits detailliertere Information bieten können, bisher leider nicht hinreichend gut bekannt.

In Anbetracht dieser Tatsache lohnt es fast nicht, ein mikroskopisches Modell darauf anzuwenden und daraus endgültige Schlüsse bezüglich seiner Annahmen zu ziehen. Vielmehr scheint es sinnvoll zu sein, die sehr komplexen und aufwendigen Rechnungen auf Reaktionen anzuwenden, welche detailliertere Information enthalten. Bezüglich der Anforderungen an das Experiment heißt dies: Man untersuche die Energie- und Winkelverteilungen der emittierten Nukleonen und bestimme den Anregungszustand des Restkerns. Man messe also möglichst vollständig und differentiell.

Es kommt uns im folgenden nicht so sehr darauf an, aus Mangel an geeigneten experimentellen Daten, alle Annahmen und Alternativen des Modells gewissermaßen "auf Vorrat" durchzurechnen und zu diskutieren, sondern wir legen Wert darauf, zu erläutern, warum es erfolgversprechend erscheint, den Aufwand einer umfangreichen Rechnung und eines nicht weniger komplexen Experiments in Kauf zu nehmen.

Bevor wir einige konkrete Rechnungen anführen, sei an dieser Stelle eine Bemerkung zur Kinematik und zu den energetischen Verhältnissen angebracht.

Wie oben bereits erwähnt, stellt ein pionisches Atom einen hochangeregten hadronischen Zustand dar, der auf mancherlei Art zerfallen kann (Fig. 4.21).

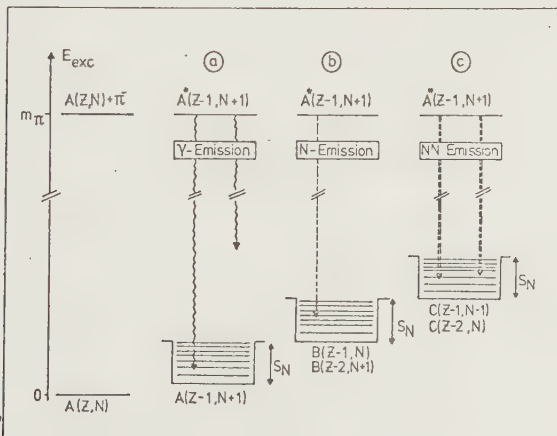


Fig. 4.21: Einige Zerfallskanäle des Pion-Kernsystems.

Beschränken wir uns auf den wahrscheinlichsten Fall, daß zwei Nukleonen emittiert werden. Nehmen wir als Ausgangskern ^{14}N und als Endkern ^{12}C , der im ersten angeregten Zustand ($J^P=2^+, T=0; E_{\text{exc}}=4.43 \text{ MeV}$) zurückbleibt:

$$^{14}\text{N}(\pi^-_p, nn)^{12}\text{C}^*(J^P=2^+, T=0; E_{\text{exc}}=4.43 \text{ MeV}). \quad (4.2)$$

Es gilt der Impulserhaltungssatz für die herauslaufenden Teilchen:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{\text{restil.}} \quad (4.3)$$

Die Summe

$$T = T_1 + T_2 \quad (4.4)$$

der kinetischen Energien der beiden Neutronen definiert den Anregungszustand des Restkerns. In Figur (4.22) ist schematisch die zu erwartende Zählrate über T bzw. der Anregungsenergie E_{exc} von ^{12}C aufgetragen.

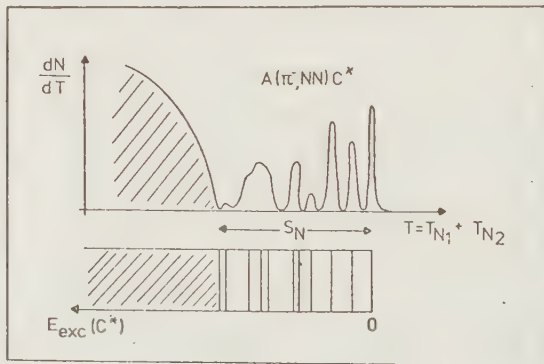


Fig. 4.22: Zu erwartende Zählraten für den Zerfallskanal (4.2) (schematisch).

Dabei muß man zwei Fälle unterscheiden:

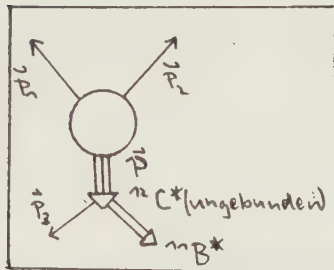


Fig. 4.23: "Inklusive" Reaktion

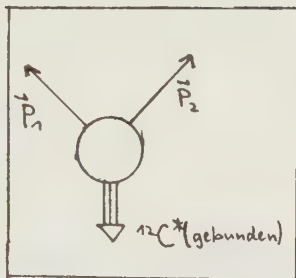


Fig. 4.24: "Exklusive" Reaktion

Ist die Anregungsenergie des Restkerns größer als seine Teilchenschwelle (Fig. 4.23), so werden weitere Teilchen emittiert. Ein Experiment, in dem nur 2-N-Emissionsraten gemessen werden, kann dann nicht mehr vollständig in dem Sinn sein, daß alle (kinematischen) Variablen beobachtet werden. Im Gegensatz dazu kann man die 2-N-Emission vollständig messen (Fig. 4.24), wenn die Anregungsenergie des Restkerns unter der Teilchenschwelle liegt. Man bekommt als Zählraten im Prinzip scharfe Linien.

Greift man eine Linie heraus, etwa für den ersten angeregten Zustand, dann ist das Experiment kinematisch vollständig bestimmt durch zwei Variable. Als solche

wählt man z.B. den Winkel θ zwischen den herauslaufenden Nukleonen und die kinetische Energie T_1 eines der Neutronen. Dabei gilt (abgesehen von Rückstoßkorrekturen):

$$T_1 + T_2 = T \approx m_\pi - E_{\text{exc}} - E_B = \text{const.} \quad (4.5)$$

Die beiden Variablen θ und T_1 spannen eine Ebene auf. Wenn man diese kinematische Ebene vollständig ausmisst, erhält man eine "Wahrscheinlichkeitsfläche":

$$\frac{d^2 W}{dT_1 d(\cos\theta)} = \frac{d^2 W}{dT_1 d(\cos\theta)}(T_1, \theta). \quad (4.6)$$

Für die Rechnung heißt das: man muß eine doppelt differentielle Übergangswahrscheinlichkeit ausrechnen. Wir haben den Formalismus dazu in Kapitel 3 (3.35) aufgestellt.

Eine solche differentielle Übergangswahrscheinlichkeit ist natürlich viel sensitiver auf Details einer Rechnung als es etwa die totale Breite ist.

Die Annahmen, die im allgemeinen in eine mikroskopische Rechnung eingehen, seien hier nochmals aufgelistet:

- (i) π -Wellenfunktion im Kerninnern;
- (ii) Wellenfunktionen für die gebundenen Nukleonen;
- (iii) Wellenfunktionen für die emittierten Nukleonen;
- (iv) Beschreibung der angeregten Zustände des Restkerns;
- (v) π -N-Absorptionsoperator.
- (vi) Mechanismus für den Impulstransfer zwischen den unmittelbar an der Reaktion beteiligten Nukleonen

Gehen wir diese Annahmen für unser konkretes Beispiel durch: Wir haben sie zum großen Teil bei der Definition unseres Modells in Kap. 3 bereits erwähnt.

- zu (i) Die Pionwellenfunktion wird durch Lösen der Klein-Gordon-Gleichung gewonnen. Dabei wird der Realteil des Ericson-Potentials berücksichtigt. Die ersten bevorstehenden Messungen unserer Reaktion werden aus technischen Gründen vermutlich nicht die Bohr'sche Bahn bestimmen können, aus der das Pion eingefangen wird (Bass 77). Die zu erwartenden Zählraten werden sich nur beziehen auf "gestoppte" Pionen. Kaskadenrechnungen über den Einfang des Pions in niedere Bohr'sche Bahnen und experimentelle Erfahrungen (Tau 76) zeigen, daß bei leichten Kernen vermutlich die meisten Pionen

aus der 2p-Bahn absorbiert werden. Dies ist für unsere Überlegungen insofern ungünstig, als für 2p-Pionwellenfunktionen die distordierenden Effekte des Kerns weitaus geringer sind als für 1s-Wellenfunktionen.

- zu (ii) Die Wellenfunktionen für die gebundenen Nukleonen sind Eigenlösungen zu einem reellen Woods-Saxon-Potential mit üblichen aus der Niederenergiephysik bekannten Parametern. Sie werden numerisch erhalten (Trau 75).
- zu (iii) Die Wellenfunktionen der freien Nukleonen werden als Lösungen zu dem gleichen Woods-Saxon-Potential gewonnen wie die gebundenen (Trau 75). Es treten daher keine Probleme bezüglich Orthogonalität von freien und gebundenen Wellenfunktionen auf. Um evtl. Effekte der sog. "final state interaction" in pauschaler Weise durchspielen zu können, kann dieses Potential auch komplex gewählt werden. Aufgrund beschränkter Rechenzeit können wir hier nur den reellen Fall berücksichtigen.
- zu (iv) Die angeregten Zustände des Restkerns ^{12}C werden allgemein durch Konfigurationsmischungs-

rechnungen beschrieben. Es hat sich dabei herausgestellt, daß der erste angeregte 2^+ -Zustand in ^{12}C die $(p_{1/2}^- p_{1/2}^-)$ -Schalenmodellkomponente dominant (99%) enthält (Gre 77).

Diese Teilchen-Lochanregung in ^{12}C kann man, wie man aus Fig. 4.25 sieht,

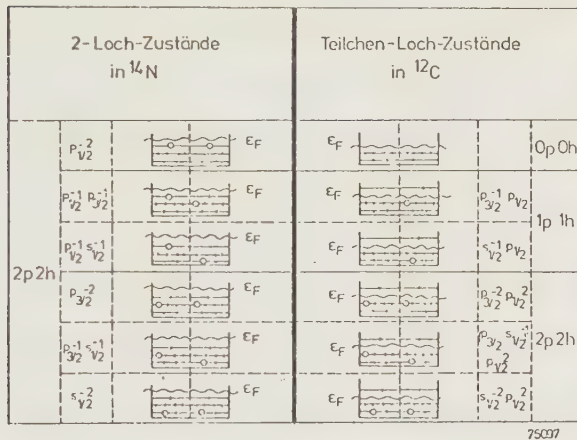


Fig. 4.25: Teilchen-Lochanregungen in ^{12}C
als 2-Lochanregungen in ^{14}N .

im Schalenmodell als 2-Lochanregung von ^{14}N ansehen. Man erhält also den ersten angeregten Zustand von ^{12}C , wenn man ein Proton und ein Neutron aus der $p_{1/2}^-$ bzw. $p_{1/2}^-$ -Schale in ^{14}N schlägt. Natürlich muß man dabei die Erhaltungssätze für Drehimpuls und Isospin beachten.

zu (v) Dies betrifft den Reaktionsmechanismus. Der Chew-Low-Operator

$$H_{CL} = \frac{f}{m_\pi} \vec{\sigma} \cdot (\vec{q}_\pi - \alpha \frac{m_\pi}{m_N} \vec{q}_N) \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}_\pi, \quad (4.7)$$

der den Vertex für die elementare Pionabsorption an einem Nukleon beschreibt, ist in seiner nichtrelativistischen Form in niederster Ordnung nicht eindeutig bestimmt (Wei 76); Zwar ist bei seiner Herleitung aus dem relativistischen pseudovektoriellen π -N-Hamiltonian

$$H \sim \bar{u} \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu u (\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}_\pi) \quad (4.8)$$

mit freien Spinoren die Konstante α eindeutig bestimmt. Aber für gebundene Nukleonen geht diese Eindeutigkeit verloren, da hier das Verhalten der großen zu den kleinen Komponenten der Wellenfunktion, welches im nichtrelativistischen Grenzfall die Konstante α festlegt, nicht sehr gut bekannt ist. Erst die Forderung nach Galilei-Invarianz des nichtrelativistischen Operators legt diese Konstante auf **1** fest. Andere Autoren nehmen höhere Ordnungen hinzu und verlangen $\alpha = 1/2$ (Dill 76). Wir verwenden hier $\alpha = 1$.

Weiter kommt hinzu, daß in höheren Ordnungen der Herleitung neben dem elementaren

Chew-Low-Hamiltonian (Fig.4.26) die sogenannten

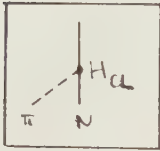


Fig. 4.26: π -N-Wechselwirkung in niederster Ordnung.

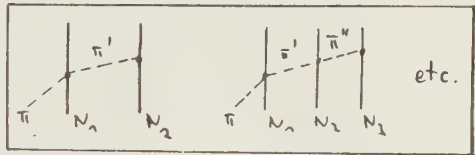


Fig. 4.27: π -N-Wechselwirkung in höheren Ordnungen.

"Rescattering"-Terme (Fig.4.27) auftreten (Hel 74, Kol 66). Dabei wird das einfallende Pion zuerst an einem oder mehreren Nukleonen gestreut, bevor es absorbiert wird. Die Existenz solcher Graphen steht in engem Zusammenhang mit dem nächsten Punkt.

zu (vi) Dies betrifft die Kernstruktur. Die NN-Wechselwirkung wird durch den Austausch von Bosonen vermittelt. Unter anderem sind daran auch Pionen beteiligt. Dies wirft die Frage auf, inwieweit ein Doppelzählungsproblem mit den Rescattering-Termen des π -N-Hamiltonians besteht.

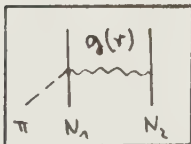


Fig. 4.28: Effektive π NN-Wechselwirkung

Wir stellen uns hier vorerst auf den Standpunkt, daß wir für die Pionabsorption den elementaren Chew-Low-Operator benutzen und den Impulstransfer im Ortsraum durch eine Besselfunktion parametrisieren (Chu 70):

$$q(r) = j_0(qr). \quad (4.9)$$

q stellt den ausgetauschten Impuls dar und muß als freier Parameter angesehen werden.

Es sollen nun einige typische Ergebnisse der Rechnung für eine exklusive Reaktion gezeigt werden. Dazu beschränken wir uns auf die bereits vorher angegebene Reaktion:

$${}^{14}\text{N}(\pi_{2p}^-, nn){}^{12}\text{C}^*(J^P=2^+, T=0; E_{\text{exc}}=443\text{MeV}). \quad (4.10)$$

Wir untersuchen das Verhalten der berechneten Energie- und Winkelverteilungen der emittierten Neutronen bei Variation der beiden wohl kritischsten Punkte für den angegebenen Reaktionstyp: Das sind einerseits die Wechselwirkung der auslaufenden Nukleonen sowohl untereinander als auch mit dem Restkern und andererseits die Größe des Impulsübertrags q zwischen den an der Reaktion beteiligten Nukleonen.

Wir wenden uns zuerst der Wechselwirkung der Nukleonen im Endzustand (final state interaction) zu. In Fig. 4.29 bis 4.31 ist jeweils die doppelt differentielle Übergangswahrscheinlichkeit $d^2W/(dT_1 d\cos\theta)$ über dem Emissionswinkel θ aufgetragen. Der Parameter der Kurvenschar ist die andere kinematisch unabhängige Variable, nämlich die kinetische Energie T_1 des einen der beiden Nukleonen. Das Potential, welches pauschal die Wechselwirkung der Nukleonen im Endzustand untereinander beschreibt, wurde willkürlich von

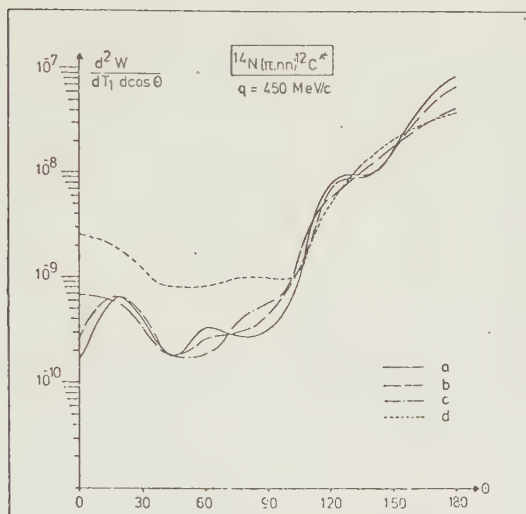


Fig. 4.29: Winkelverteilung der emittierten Neutronen:
Impulsübertrag $q = 450 \text{ MeV}/c$.
Potentialtiefe für die auslaufenden Neutronen:
 $V_{N\text{-kern}} = -50 \text{ MeV}$.
Kurve a) $T_1 = 52 \text{ MeV}$
Kurve b) $T_1 = 39 \text{ MeV}$
Kurve c) $T_1 = 26 \text{ MeV}$
Kurve d) $T_1 = 13 \text{ MeV}$

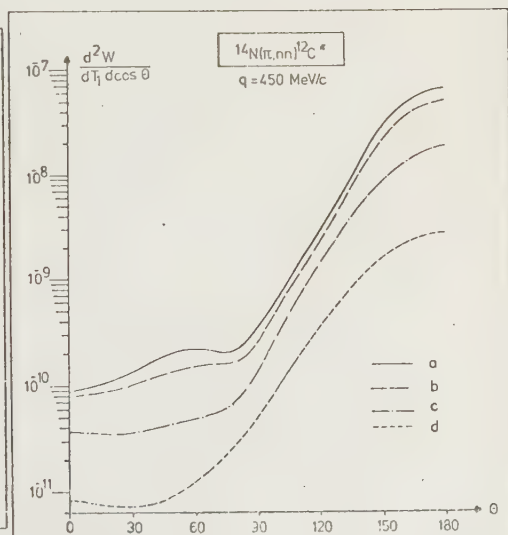
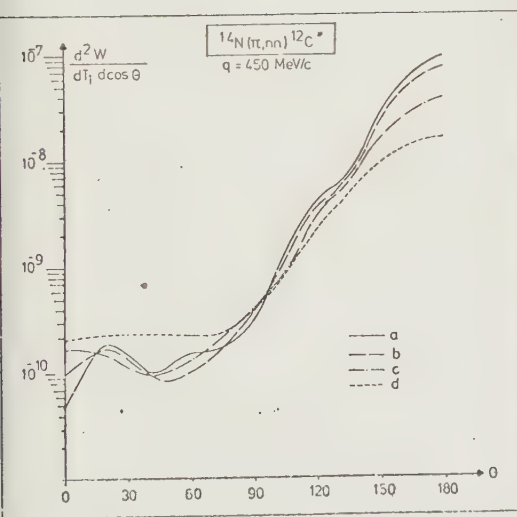


Fig. 4.30: Wie Fig. 4.29; Potentialtiefe $V_{N\text{-Kern}} = -25 \text{ MeV}$. Fig. 4.31: Wie Fig. 4.29; Potentialtiefe $V_{N\text{-Kern}} = 0 \text{ MeV}$.

seinem vollen Wert (Fig.4.29) über den halben Wert (Fig.4.30) auf Null heruntergedreht (Fig.4.31). Im letzten Fall werden also die auslaufenden Nukleonen durch ebene Wellen beschrieben. Der Impulstransfer q ist bei 450 MeV/c festgehalten. Es läßt sich feststellen, daß die Struktur der Kurven durch die Verwendung ebener Wellen im Ausgangskanal vereinfacht und geglättet wird. Gleichzeitig vergrößern ebene Wellen den Abfall von Rückwärts- nach Vorwärtswinkeln. Das allgemein starke Absinken der Kurven zu Vorwärtswinkeln hin läßt sich leicht mit der Tatsache erklären, daß bei Vorwärtsemission der Schwerpunktsimpuls der emittierten Nukleonen in der betrachteten Reaktion eine Größe von etwa 650 MeV/c erreicht, und dieser Wert im Kern bereits äußerst unwahrscheinlich ist.

Der Verlauf von einer komplizierten zu einer glatten Struktur der Übergangswahrscheinlichkeit läßt sich auch schön bei der Umsetzung der Werte von Fig.4.29-31 in "Höhenlinien", d.h. Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit, über der gesamten T_1 - θ -Ebene erkennen. Diese Art der Auftragung bietet sich hier geradezu an. Zur Vereinfachung der Darstellung wurde der Wert der Übergangswahrscheinlichkeit für $T_1=52$ MeV (symmetrische Emission) bei $\theta = 180^\circ$ jeweils gleich 1 gesetzt. Es erscheint auch in dieser Auftragsweise (Fig.4.32 bis 4.34) die oben erwähnte Glättung der Struktur bei Verwendung ebener Nukleonenwellen. Überdies bemerkt man hier deutlich das Verschwinden der beiden kleinen "Hügel" (1%-Linie) unter Vorwärtswinkeln.

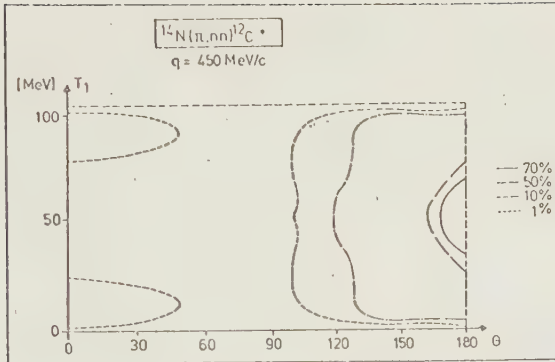


Fig. 4.32: Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit
für Fig. 4.29

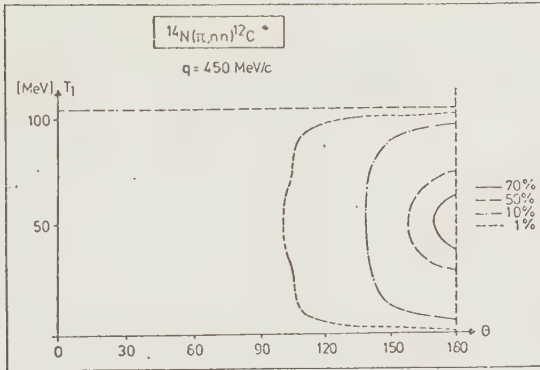


Fig. 4.33: Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit
für Fig. 4.30

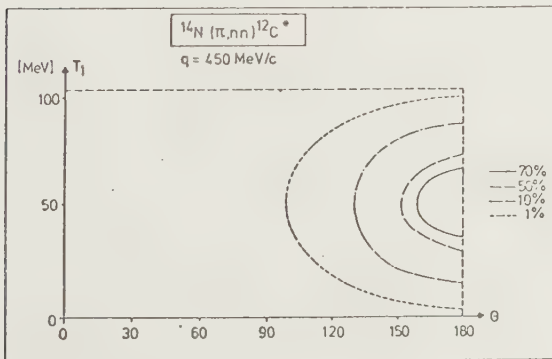


Fig. 4.34: Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit
für Fig. 4.31

Ganz ähnliche Effekte treten auf, wenn man den Impulstransfer $q = 300 \text{ MeV/c}$ setzt. Die Fig. 4.35 bis 4.38 sind analog den vorigen Bildern. Wiederum bewirken ebene Nukleonenwellen eine Glättung gegenüber verzerrten Wellen. Weiterhin zeigt sich hier im Vergleich zu den Bildern mit $q = 450 \text{ MeV/c}$ eine Anhebung der Übergangswahrscheinlichkeit über den gesamten Winkelbereich. Dies war aus dem Verhalten der totalen Übergangswahrscheinlichkeit bei entsprechender Variation von q zu erwarten (Kap. 4.2).

Allen Figuren in diesem Abschnitt ist gemeinsam ein starkes Ansteigen der Übergangswahrscheinlichkeit unter Rückwärtswinkeln sowie eine Bevorzugung der Gleichverteilung der kinetischen Energien auf die beiden emittierten Nukleonen. Da diese zwei Nukleonen in unserer Reaktion Neutronen sind, muß außerdem eine Symmetrie bezüglich der halben zur Verfügung stehenden kinetischen Energie vorherrschen. Die gezeigten Beispiele wurden so gewählt, daß die Größenordnungen der totalen Absorptionsbreiten mit dem experimentellen Wert übereinstimmen.

In einer kurzen Zusammenfassung stellen wir fest: Es gehen zahlreiche Annahmen in eine mikroskopische Rechnung ein. Dies verlangt zur Überprüfung eine entsprechende, detaillierte experimentelle Information. Sie kann realisiert werden durch die Messung exklusiver Zerfallskanäle im gesamten ki-

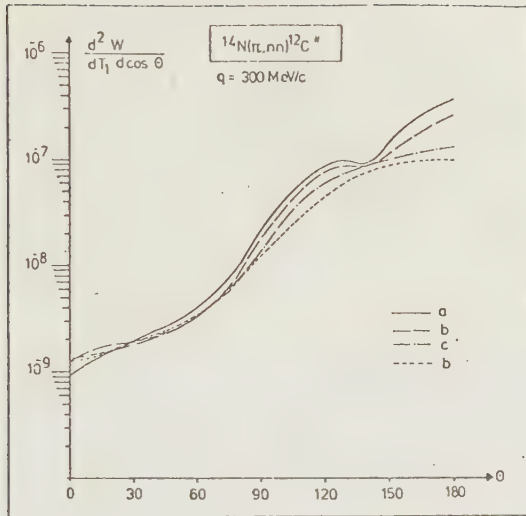


Fig. 4.35: Winkelverteilung der emittierten Neutronen:
 Impulsübertrag $q = 300 \text{ MeV/c}$.
 Potentialtiefe für die auslaufenden Neutronen:
 $V_{N\text{-Kern}} = -50 \text{ MeV}$.
 Kurve a) $T_1 = 52 \text{ MeV}$
 Kurve b) $T_1 = 39 \text{ MeV}$
 Kurve c) $T_1 = 26 \text{ MeV}$
 Kurve d) $T_1 = 13 \text{ MeV}$

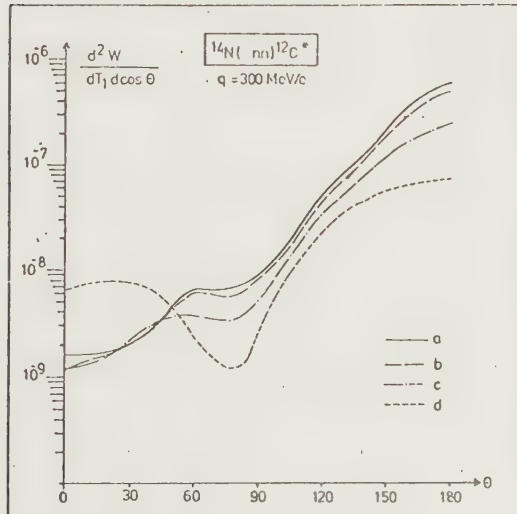


Fig. 4.36: Wie Fig. 4.35, Potentialtiefe $V_{N\text{-Kern}} = 0 \text{ MeV}$.

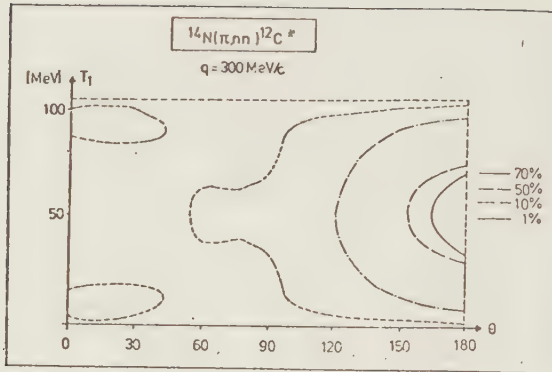


Fig. 4.37 : Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit
für Fig. 4.35

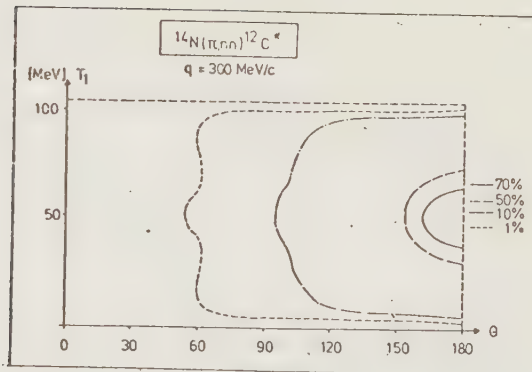


Fig. 4.38 : Linien konstanter Übergangswahrscheinlichkeit
für Fig. 4.36

nematisch möglichen Bereich. Die zugehörigen Rechnungen beinhalten die Angabe einer doppelt differentiellen Übergangswahrscheinlichkeit. Um die Struktur der erhaltenen Kurven zu diskutieren, empfiehlt es sich, die Daten neben der üblichen Auftragsweise als Höhenlinien über der kinematischen T_1 - θ -Ebene aufzuzeichnen. Auf diese Art ist es möglich, den Einfluß der einzelnen Modellannahmen übersichtlich darzustellen. Allerdings erscheint es zum jetzigen Zeitpunkt müßig, ohne gesicherte experimentelle Anhaltspunkte die Vielzahl der Annahmen einer mikroskopischen Rechnung rigoros durchzuspielen.

5. Folgerungen und Erweiterungen des vorliegenden Modells

Die Diskussion der vorangehenden Kapitel zeigte, daß es mit Hilfe eines relativ einfachen Modells für den Impulstransfer zwischen den Nukleonen möglich ist, einige Prozesse der Pionabsorption befriedigend zu beschreiben. Soweit einigermaßen zuverlässige experimentelle Daten vorhanden sind, lassen sich damit quantitative und qualitative Erklärungen finden. Nichtsdestoweniger gibt es gewisse Unsicherheiten, die sowohl experimenteller als auch theoretischer Natur sind.

Zur Zeit liegen relativ wenige experimentelle Daten vor; diese sind nicht vollständig im Hinblick auf die Charakterisierung des Endzustandes. Weiterhin sind sie nicht systematisch über eine Anzahl von Kernen. Schließlich sind sie i.a. mit großen statistischen Fehlern sowie mit schlechter Energie- bzw. Winkelauflösung behaftet.

Von der experimentellen Seite her wäre es daher wünschenswert, bessere Auflösung und Statistik anzustreben. Im Interesse einer vollständigen Information sollten die Experimente möglichst "exklusiv" sein. Durch die neuerdings möglichen hohen π -Strahl-Intensitäten scheinen solche Experimente systematisch durchführbar.

Damit ist es im Hinblick auf die zu erwartende Entwicklung wichtig, über das optische Modell der Pion-Kern-Wechselwirkung hinauszugehen und mikroskopische Versuche zu unternehmen, um einzelne Zerfallkanäle im Detail zu untersuchen.

Es ist nicht zu erwarten, daß die im vorangehenden Kapitel gezeigten Rechnungen in Anbetracht der Annahmen sofort mit den entsprechenden experimentellen Daten übereinstimmen. Es ist anzunehmen, daß das hier benutzte simple Modell einer Verfeinerung unterzogen werden muß. Es ist leicht abzusehen, wie sie etwa auszusehen hätte. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, die einer gründlichen Ausarbeitung bedürfen, soll dies in Umrissen erläutert werden.

Die hier benutzte Korrelationsfunktion berücksichtigt in phänomenologischer Weise den Einfluß des repulsiven Anteils der N - N -Wechselwirkung auf die N -Wellenfunktionen. In diesem Modell verläuft die Pionabsorption wie in Fig. 5.1

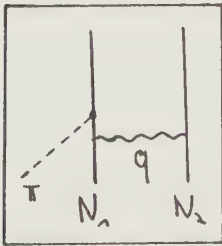


Fig. 5.1: Effektive NN -Wechselwirkung

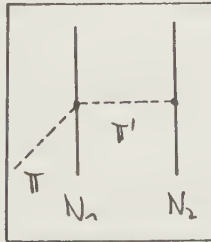


Fig. 5.2:

Mögliche mikroskopische Verfeinerungen der NN -Wechselwirkung.

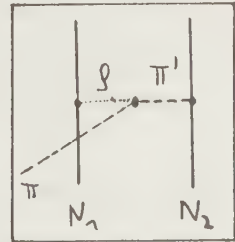


Fig. 5.3:

schematisch dargestellt. Zwischen den Nukleonen wird ein Impuls q ausgetauscht, der es den Nukleonen im Schalenmodell erlaubt, den Kern zu verlassen. Es werden dabei keinerlei Aussagen über den inneren Mechanismus der Korrelation, d.h. über den Teilchenaustausch zwischen den Nukleonen gemacht.

Man weiß mittlerweile (Erk 74), welche Teilchen und in welcher Weise sie zur N-N-Wechselwirkung beitragen. Ein erster Schritt auf eine derartige Interpretation der Korrelationsfunktion ist darin zusehen, daß man den Impuls q durch ein intermediäres Pion von einem Nukleon zum anderen transferieren läßt (Fig.5.2). Das sich daran anschließende Modell ("Rescattering-Modell") wie es von Koltun und Reitan (Kol 66) eingeführt wurde, berücksichtigt allerdings noch zusätzlich explizit die Propagation des Pions π^1 im Zwischenzustand, so daß nicht nur ein einzelner Impuls q , sondern im Grunde ein Impulspaket $w(q)$ zwischen den Nukleonen ausgetauscht wird. Auf die im vorigen Kapitel zitierten Experimente angewandt, liefert dieses Modell Ergebnisse (Hel 74), die durchaus im Einklang mit Korrelationsrechnungen stehen.

Ein (vorläufig) letzter Schritt besteht darin, den Vertex 1 in der Fig. 5.2 weiter aufzulösen, etwa indem man annimmt, daß s-Wellenpionen an der Schwelle bevor-

zugt über ein ρ -Meson am Nukleon streuen (Ris 76), wie es schematisch in Fig. 5.3 abgebildet ist. Ein solch detailliertes Modell enthält gegenüber dem einfachen Korrelationsmodell nicht nur zusätzlich Propagatoren und damit Integrationen über die Impulse der Teilchen im Zwischenzustand, sondern auch Spin- und Isospinterme, die dazu führen, daß ein solches Modell stark von der Ladung und den Drehimpulsen bzw. Spins der beteiligten Teilchen abhängt. Wegen der damit zusammenhängenden numerischen Schwierigkeiten bei der konkreten Anwendung auf die Pionabsorption an Kernen ist es ratsam, eine genäherte vereinfachte Version zu verwenden, die aber dennoch alle an der Schwelle dominanten Züge aufweisen sollte. Weitere experimentelle Daten sollten dazu beihelfen, die relevanten Beiträge leichter aufzudecken.

Es wurden Testrechnungen angestellt, die als erste Erweiterung der simplen Korrelationsfunktion ein Impulspaket $w(q)$ mit einer endlichen Breite verwenden. Die Ergebnisse sind jedoch nicht aufschlußreich, da sie beim gegenwärtigen Stand von Theorie und Experiment lediglich in der Einführung eines weiteren Fitparameters für ein paar wenige Daten bestehen.

In Anbetracht der bei genauerem Zusehen auftretenden theoretischen Probleme scheint der Gebrauch einer wie hier ad hoc eingeführten Korrelationsfunktion beim gegenwärtigen Stand von Theorie und Experiment eine geschickte Parametrisierung einer mikroskopischeren Betrachtungsweise zu sein. Inwieweit eine solche Korrelationsfunktion "echte" kurzreichweitige Korrelationen zwischen den Nukleonen repräsentiert, sei an dieser Stelle dahingestellt.

Neben dem Mechanismus des Impulstransfers scheint die Form des nichtrelativistischen π -N-Absorptionsoperators H_{CL} wesentlich zu sein. Durch das Auftreten von Interferenzeffekten seiner beiden Gradiententerme, besonders bei differentiellen Übergangswahrscheinlichkeiten, wird die Frage nach seiner Struktur wichtig. Einen gangbaren Ausweg scheint eine völlig relativistische Behandlung des Operators und der Nukleonen im Kern zu bieten (Bro 77).

Schließlich ist von den übrigen Punkten des Modells noch das Problem der sog. "final state interaction" zu erwähnen. Die Wechselwirkung der emittierten Nukleonen untereinander und mit dem Restkern wird pauschal durch ein reelles Nukleon-Kern-Potential berücksichtigt. Sollte es sich als nötig erweisen, kann dieses Potential auch zu

einem komplexen erweitert werden, um einer Streuung und weiteren Reaktionen der emittierten Nukleonen mit dem Kern pauschal Rechnung zu tragen.

Es wurde eben eine Reihe von Punkten angesprochen, die bei einer Erweiterung und Verfeinerung unseres einfachen Modells für die π -NN-Wechselwirkung in Betracht gezogen werden müssen. Wie die Beschreibung inklusiver Reaktionen andeutet, enthält der einfache "Jastrow"-Ansatz jedoch bereits die dominanten Züge der effektiven π -NN-Wechselwirkung.

Die Informationen, die man aus inklusiven Reaktionen ziehen kann, werden wesentlich erweitert, wenn man exklusive Reaktionen in die Betrachtung mit einbezieht. Bei Vorliegen besserer experimenteller Daten sollten sich daraus Hinweise auf mögliche Erweiterungen des Modells und damit der π -NN-Wechselwirkung ergeben.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die nukleare Pionabsorption im Rahmen einer Schalenmodellbeschreibung der beteiligten Kerne untersucht mit dem Ziel, die zur Interpretation experimenteller Beobachtungen notwendigen Methoden zu entwickeln und auf einige spezielle Beispiele modellhaft anzuwenden.

Ausgehend von der Tatsache, daß das Pion aus kinematischen und dynamischen Gründen vorwiegend von zwei Nukleonen absorbiert wird, wurde ein Modell für die Pion-Kern-Wechselwirkung formuliert, wobei der Impulstransfer zwischen den Nukleonen entscheidend ist; dieser Mechanismus wurde in einfacher Weise durch eine Korrelationsfunktion parametrisiert. Damit wurden 2N- und 1N-Emissionsprozesse berechnet.

Die Analyse inklusive Reaktionen (Kap. 4.1) zeigt, daß die verwendeten Modellannahmen ein semiquantitatives Verständnis der nuklearen Pionabsorption erlauben. Weiterhin ist es möglich, die vorliegenden experimentellen Daten konsistent zu beschreiben. Es zeigt sich, daß die berechneten Größen stark von der Korrelationsfunktion abhängen, d.h. vom Wert des übertragenen Impulses q . Für einen Impulsbereich $q \approx (350 \pm 100)$ MeV/c erhält man eine befrie-

digende Beschreibung der folgenden, experimentell einigermaßen bekannten Größen:

- totale Absorptionswahrscheinlichkeit (Breite);
- partielle Absorptionswahrscheinlichkeit für pn- und nn-Emission;
- pn/nn - Verhältnis;
- Verhältnis von $2N/1N$ - Emission.

Die erzielten Resultate lassen den Schluß zu, daß die benutzte simple Korrelationsfunktion die wesentlichen Züge der Pion-kern-Wechselwirkung in einer Schalenmodellbeschreibung berücksichtigt.

Bei der anschließenden Anwendung des Modells auf exklusive Reaktionen (Kap. 4.2) wurden die Energie- und Winkelverteilungen der emittierten Nukleonen für einen bestimmten Anregungszustand des Restkerns berechnet. Aus diesen Ergebnissen lassen sich zur Zeit wegen des Fehlens geeigneter experimenteller Daten keine eindeutigen Aussagen über die Gültigkeit bzw. eine Erweiterung der verwendeten Modellannahmen gewinnen. Es zeigt sich aber, daß diese Energie- und Winkelverteilungen auf spezielle Modellannahmen - etwa über die Korrelation, die Endzustandswechselwirkung oder die Struktur der angeregten Restkernzustände - recht empfind-

lich reagieren. Im Interesse einer eindeutigen Interpretation der Prozesse erscheint es jedoch wichtig zu sein, vor allem solche Reaktionen zu untersuchen, bei denen der Restkern gebunden bleibt.

Grundsätzlich sind vollständige Messungen exklusiver Reaktionen geeignet; detaillierte Informationen über die Güte der benutzten Annahmen sowie eventuelle Erweiterungen zu liefern. Die in naher Zukunft zu erwartenden Daten aus den Mesonfabriken werden es ermöglichen, unser Modell eingehender zu überprüfen und gegebenenfalls zu verfeinern. Auf diese Weise wird es möglich sein, zu einem einheitlichen und realistischen Bild der bei der nuklearen Pionabsorption beteiligten Prozesse zu gelangen.

Im Hinblick darauf soll die vorliegende Arbeit ein erster Versuch sein, die nukleare Pionabsorption zu beschreiben im Rahmen konkreter, mikroskopischer Modellvorstellungen über die Natur der beteiligten Kerne und über die Struktur der elementaren Pion-Nukleon-Wechselwirkung.

Literaturverzeichnis

- Back 70 Backenstoß, G.: Ann.Rev.Nucl.Sci. 20, 467 (1970)
- Back 74 Backenstoß, G. et al.: Nucl.Phys. B66, 125 (1974)
- Bass 76 Bassalleck, B. et al.: Phys.Lett. 65B, 128 (1976)
- Bass 77 Bassalleck, B.: private Mitteilung
- Blum 70 Blum, B.: Nucl.Phys. B23, 155 (1970)
- Bro 77 Brockmann, R.: Dissertation, Erlangen (1977)
- Chu 70 Chung, K. et al.: Z.Physik 240, 195 (1970)
- Cou 76 Coupat, B. et al.: Saclay preprint (1976)
- Dan 71 Danos, M.: Ann.Phys. 63, 319 (1971)
- Dey 76 Dey, W. et al.: Helv.Phys.Acta 49, 778 (1976)
- Dill 76 Dillig, M.: private Mitteilung
- Engf 76 Engfer, R. et al.: SIN-Jahresbericht (1976), prepr.
- Eri 66 Ericson, M., Ericson T.E.O.: Ann.Phys. 36, 323 (1966)
- Erk 74 Erkelenz, K.: Phys.Rep. C13, 191 (1974)
- Gre 77 Grecksch, E.: private Mitteilung
- Hel 74 Helwig, Chr.: Diplomarbeit Erlangen (1974)
- Hub 70 Huber, M.G.: Ann. de Phys. 5, 239 (1970)
- Hüf 75 Hüfner, J.: Phys.Rep. 21C, 1 (1975)
- Jast 55 Jastrow, R.: Phys.Rev. 98, 1479 (1955)
- Kol 66 Koltun, D.S., Reitan, A.: Phys.Rev. 141, 1413 (1966)
- Kre 69 Krell, M., Ericson, T.E.O.: Nucl.Phys. B11, 521 (1969)
- Lee 72 Lee, D.M. et al.: Nucl.Phys. A182, 20 (1972)
- Muir 65 Muirhead, H.: The Physics of Elementary Particles,
Pergamon Press (1965), p.266ff

- Nord 68 Nordberg, M.E. et al.: Phys.Rev. 165, 1096 (1968)
- Rich 76 Richter, J.: Dissertation Erlangen (1976)
- Ris 76 Riska, D.O. et al.: Phys.Lett. 61B, 41 (1976)
- Tau 71 Tauscher, L.: Proc.Int.Seminar on Pion-Nucleus
Interactions, Strasbourg (1971), (CNRS, Strasbourg
1971), p.45
- Tau 72 Tauscher, L.: private Mitteilung
- Tau 74 Tauscher, L., Schneider, W.: Z.Physik 271, 409 (1974)
- Tau 76 Tauscher, L.: private Mitteilung
- Trau 75 Trautmann, L.: Diplomarbeit, Erlangen (1975)
- Wei 76 Weise, W.: private Mitteilung

Anhang A

Antisymmetrisierte Schalenmodell-Wellenfunktionen

Im folgenden wollen wir eine A-Teilchen-Wellenfunktion entwickeln nach Ein- bzw. Zweiteilchen Wellenfunktionen, wobei wir besonderen Wert auf die Drehimpuls- und Isospinkopplung sowohl der Gesamtwellenfunktion als auch der entsprechenden (A-1) - bzw. (A-2) - Teilchenwellenfunktionen legen.

Wir beschränken uns auf Kerne mit vollständig abgeschlossenen Schalen. Für Gesamtspin und Isospin der betrachteten Kerne gilt also: $J = T = 0$. Im reinen Schalenmodell werden diese Zustände durch eine antisymmetrische Produkt-Wellenfunktion beschrieben. Dazu definiert man einen Antisymmetrisierungsoperator, der aus dem Produkt von 1-Teilchen-Wellenfunktionen eine normierte und antisymmetrisierte A-Teilchen-Wellenfunktion macht:

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P P. \quad (\text{A.1})$$

P ist der Permutationsoperator.

Wendet man $\mathcal{A}$ auf das Produkt $\varphi_1(1)\varphi_2(2)\dots\varphi_A(A)$ an, so kann man das Resultat als Slater-Determinante

schreiben:

$$\begin{aligned} \Psi^{[0]}(1, \dots, A) &= A[y_1(1) y_2(2) \dots y_A(A)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \dots & y_1(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_A(1) & y_A(2) & \dots & y_A(A) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Der tiefgestellte Index K steht für alle einen Einteilchen-Zustand K charakterisierenden Quantenzahlen:

$$K \equiv \{n, l, j, m_j, t, m_t\}. \quad (\text{A.3})$$

Die Zuordnung ist willkürlich, aber eindeutig. Sie definiert eine gewisse Phasenwahl, die konsequenterweise durchgehalten werden muß. Die Entwicklung der antisymmetrischen A-Teilchen-Wellenfunktion (A.2) nach antisymmetrischen 1-Teilchen- und 2-Teilchen-Wellenfunktionen geschieht im Folgenden in enger Anlehnung an das Vorgehen in der Dissertation von Richter (Rich 76).

A.1 Entwicklung nach 1-Teilchen-Wellenfunktionen

$$\psi^{[0]}(z_1, \dots, z_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{k=1}^A (-1)^{k-1} y_k(z) \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \psi_k^{[1]}(z_1, \dots, z_A). \quad (\text{A.4})$$

$\psi_k^{[1]}(z_1, \dots, z_A)$ ist die Adjungierte der
Determinante (A.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \psi_k^{[1]} &= \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \begin{vmatrix} y_1(z) & y_1(z) & \dots & y_1(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}(z) & y_{k-1}(z) & \dots & y_{k-1}(A) \\ y_{k+1}(z) & y_{k+1}(z) & \dots & y_{k+1}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_A(z) & y_A(z) & \dots & y_A(A) \end{vmatrix} \\ &=: \overline{\psi}_k^{[1]}(z_1, \dots, z_A). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Definiere nun eine Quantenzahl α , welche alle zur Bestimmung des Zustandes K nötigen Quantenzahlen enthält, ausgenommen die "m"-Quantenzahlen m_j und m_t :

$$\alpha := \{n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha, t_\alpha\}.$$

(A.6)

Da wir uns in der vorliegenden Arbeit lediglich auf Kerne beschränken, bei denen die Hauptquantenzahl $n_\alpha = 1$ ist, und da ohnehin $t_\alpha = 1/2$, steht α im wesentlichen also nur für l_α und j_α :

$$\alpha = \{ l_\alpha, j_\alpha \}.$$

(A.7)

Die Phase $(-)^{j-k}$ läßt sich so schreiben:

$$(-)^{j-k} = (-)^{j_\alpha + m_{j_\alpha} + t_\alpha + m_{t_\alpha}} = (-)^{j_\alpha + 1/2 + m_{j_\alpha} + m_{t_\alpha}} \quad (\text{A.8})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \psi^{[0]}(r_1, \dots, A) &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\substack{\alpha \\ m_{j_\alpha} m_{t_\alpha}}} (-)^{j_\alpha + 1/2 + m_{j_\alpha} + m_{t_\alpha}} \\ &\quad \times \psi_{m_{j_\alpha} m_{t_\alpha}}^{[0]}(r) \psi_{\{\alpha, m_{j_\alpha}, m_{t_\alpha}\}}(r_1, \dots, A). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} & \hat{j}_\alpha [y^{[j_\alpha]}(r) \otimes \psi^{[j_\alpha]}(r_1, \dots, A)] \\ &= \hat{j}_\alpha \sum_{m_{j_\alpha}} (j_\alpha m_{j_\alpha} j_\alpha - m_{j_\alpha} | 00) \varphi_{m_{j_\alpha}}^{[j_\alpha]}(r) \psi_{-m_{j_\alpha}}^{[j_\alpha]}(r_1, \dots, A) \\ &= \sum_{m_{j_\alpha}} (-)^{j_\alpha - m_{j_\alpha}} \varphi_{m_{j_\alpha}}^{[j_\alpha]}(r) \psi_{-m_{j_\alpha}}^{[j_\alpha]}(r_1, \dots, A) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

und der Identifikation

$$(-)^{j_\alpha + r_\alpha + m_{j_\alpha} + m_{t_\alpha}} \psi^{[j_\alpha][r_\alpha]}_{\{\alpha, m_{j_\alpha}, m_{t_\alpha}\}}(2, \dots, A)$$

$$= (-)^{j_\alpha + r_\alpha - m_{j_\alpha} - m_{t_\alpha}} \psi^{[j_\alpha][r_\alpha]}_{-m_{j_\alpha}, -m_{t_\alpha}}(2, \dots, A)$$

(A.11)

ergibt sich schließlich:

$$\psi^{[0]}(1, \dots, A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha} \hat{j}_{\alpha} \hat{r}_{\alpha} \left[\psi_{\alpha}^{[j_{\alpha}][r_{\alpha}]} \otimes \overline{\psi}_{\alpha}^{[j_{\alpha}][r_{\alpha}]}(2, \dots, A) \right]^{[0][0]}.$$

(A.12)

A.2 Entwicklung nach 2-Teilchen-Wellenfunktionen

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \Psi^{[0]}(1, \dots, A) &= \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \sum_{k < l} (-1)^{k+l} \{ y_k(1) y_l(2) \\
 &\quad - y_l(1) y_k(2) \} \bar{\Psi}_{kl}(3, \dots, A) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \sum_{k < l} (-1)^{k+l} \phi_{kl}(1, 2) \bar{\Psi}_{kl}(3, \dots, A),
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \phi_{kl}(1, 2) &= 1/\sqrt{2} \{ y_k(1) y_l(2) - y_l(1) y_k(2) \} \\
 \bar{\Psi}_{kl}(3, \dots, A) &= \text{(normierte) Adjungierte zur} \\
 &\quad \text{Slaterdeterminante } \Psi^{[0]}(1, \dots, A).
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Mit einer zu (A.8) analogen Phasenbeziehung läßt sich nun schreiben:

$$\begin{aligned}
 \Psi^{[0]}(1, \dots, A) &= \sum_{\alpha \in \beta} (-1)^{i_{\alpha} + m_{i_{\alpha}} + j_{\beta} + m_{j_{\beta}} + 1 + m_{t_{\alpha}} + m_{t_{\beta}}} \\
 &\quad \{ m_{i_{\alpha}}, m_{j_{\beta}} \} \\
 &\quad \times \{ y_{m_{i_{\alpha}} m_{t_{\alpha}}}^{[i_{\alpha}][j_{\alpha}]}(1) y_{m_{j_{\beta}} m_{t_{\beta}}}^{[j_{\beta}][t_{\beta}]}(2) - y_{m_{j_{\beta}} m_{t_{\beta}}}^{[j_{\beta}][t_{\beta}]}(2) y_{m_{i_{\alpha}} m_{t_{\alpha}}}^{[i_{\alpha}][j_{\alpha}]}(1) \} \\
 &\quad \times \Psi_{\{ \alpha \beta, m_{i_{\alpha}}, m_{t_{\alpha}}, m_{j_{\beta}}, m_{t_{\beta}} \}}(3, \dots, A),
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

mit

$$\{m_j, m_t\} = \begin{cases} m_{j\alpha}, m_{j\beta}, m_{t\alpha}, m_{t\beta} & \text{für } \alpha \neq \beta \\ m_{j\alpha} < m_{j\beta}, m_{t\alpha} < m_{t\beta} & \text{für } \alpha = \beta. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Nach Zusammenkoppeln der Einteilchen-Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} y_{m_{j\alpha} m_{t\alpha}}^{[j\alpha][t\alpha]}(1) y_{m_{j\beta} m_{t\beta}}^{[j\beta][t\beta]}(2) &= \sum_{\substack{\alpha \neq \beta, T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}} (j_{\alpha} m_{j\alpha} j_{\beta} m_{j\beta} | \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix} M_{\alpha\beta}) \\ &\quad \times (t_{\alpha} m_{t\alpha} t_{\beta} m_{t\beta} | T_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}) \\ &\quad \times [y_{[j\alpha][t\alpha]}^{[j\alpha][t\alpha]}(1) \otimes y_{[j\beta][t\beta]}^{[j\beta][t\beta]}(2)] \begin{smallmatrix} [\alpha\beta] & [T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta} & M_{T_{\alpha\beta}} \end{smallmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi^{[A]}(1, \dots, A) &= \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha\beta, T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [y_{[j\alpha][t\alpha]}^{[j\alpha][t\alpha]}(1) \otimes y_{[j\beta][t\beta]}^{[j\beta][t\beta]}(2)] \begin{smallmatrix} [\alpha\beta] & [T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta} & M_{T_{\alpha\beta}} \end{smallmatrix} \\ &\quad - (-)^{\alpha\beta - j_{\alpha} - j_{\beta} + T_{\alpha\beta} - \gamma} [y_{[j\beta][t\beta]}^{[j\beta][t\beta]}(1) \otimes y_{[j\alpha][t\alpha]}^{[j\alpha][t\alpha]}(2)] \begin{smallmatrix} [\alpha\beta] & [T_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta} & M_{T_{\alpha\beta}} \end{smallmatrix} \} \\ &\quad \times \sum_{\{m_j, m_t\}} (j_{\alpha} m_{j\alpha} j_{\beta} m_{j\beta} | \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix} M_{\alpha\beta}) (t_{\alpha} m_{t\alpha} t_{\beta} m_{t\beta} | T_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}) \\ &\quad \times (-)^{j_{\alpha} + m_{j\alpha} + j_{\beta} + m_{j\beta} + \gamma + m_{t\alpha} + m_{t\beta}} \Psi_{\begin{smallmatrix} [\alpha\beta], m_{j\alpha}, m_{j\beta}, m_{t\alpha}, m_{t\beta} \end{smallmatrix}}(1, \dots, A). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Unter Benutzung von

$$(j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | \exists_\alpha \beta M_{\alpha\beta}) = (-)^{\exists_\alpha \beta - j_\alpha - j_\beta} (j_\alpha - m_\alpha j_\beta - m_\beta | \exists_\alpha \beta - M_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.19})$$

können wir folgende Definition einführen:

$$\begin{aligned} & \sum_{\{m_j, m_t\}} (-)^{j_\alpha + m_\alpha + j_\beta + m_\beta + 1 + m_{t_\alpha} + m_{t_\beta} + \exists_\alpha \beta + T_\alpha \beta - j_\alpha - j_\beta - 1} \\ & \times (j_\alpha - m_\alpha j_\beta - m_\beta | \exists_\alpha \beta - M_{\alpha\beta}) (j_\alpha - m_\alpha j_\beta - m_\beta | T_\alpha \beta - M_{T_\alpha \beta}) \\ & \times \psi_{-m_{j_\alpha}, -m_{j_\beta}, -m_{t_\alpha}, -m_{t_\beta}} [j_\alpha] [j_\beta] [t_\alpha] [t_\beta] (\beta, \dots, A) \\ & =: (-)^{\exists_\alpha \beta + T_\alpha \beta - M_{\alpha\beta} - M_{T_\alpha \beta}} \psi_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T_\alpha \beta}} [\exists_\alpha \beta] [T_\alpha \beta] (\beta, \dots, A). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(\beta, \dots, A) &= \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \exists_\alpha \beta T_\alpha \beta \\ M_{\alpha\beta} M_{T_\alpha \beta}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [y^{(j_\alpha)}(t_\alpha)](1) \otimes [y^{(j_\beta)}(t_\beta)](2) \right\} \begin{Bmatrix} \exists_\alpha \beta \\ M_{\alpha\beta} M_{T_\alpha \beta} \end{Bmatrix} \\ & \quad - (-)^{\exists_\alpha \beta + T_\alpha \beta - j_\alpha - j_\beta - 1} [y^{(j_\alpha)}(t_\alpha)](1) \otimes [y^{(j_\beta)}(t_\beta)](2) \begin{Bmatrix} \exists_\alpha \beta \\ M_{\alpha\beta} M_{T_\alpha \beta} \end{Bmatrix} \\ & \quad \times (-)^{\exists_\alpha \beta - M_{\alpha\beta} + T_\alpha \beta - M_{T_\alpha \beta}} \psi_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T_\alpha \beta}} [\exists_\alpha \beta] [T_\alpha \beta] (\beta, \dots, A). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Falls $\alpha = \beta$ und $(\partial_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta})$ gerade, ergibt die geschweifte Klammer in (A.21) Null.

Die Phase $(-)^{\partial_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} - M_{T_{\alpha\beta}}}$ kann man bei konkreten Rechnungen weglassen, da sie bei der Integration über die Koordinaten des Restkerns wegfällt.

Definiere schließlich noch:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{M_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1,2) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[y^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1) \otimes y^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(2) \right]_{M_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]} \right. \\ &\quad \left. - (-)^{\partial_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} - M_{T_{\alpha\beta}}} \left[y^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1) \otimes y^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(2) \right]_{M_{\alpha\beta}, M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]} \right\}. \end{aligned}$$

(A.22)

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \psi^{[0]}(1, \dots, A) &= \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \partial_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}}} \hat{\partial}_{\alpha\beta} \hat{T}_{\alpha\beta} \\ &\quad \times \left[\overline{\Phi}^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1,2) \otimes \overline{\Psi}^{[\partial_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(3, \dots, A) \right]^{[0][0]}. \end{aligned}$$

(A.23)

Dabei ist für die Norm der einzelnen Wellenfunktionen folgendes zu beachten:

$$\langle \overset{=}{\Phi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{M_{\alpha\beta} M_{T\alpha\beta}} | \overset{=}{\Phi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{M_{\alpha\beta} M_{T\alpha\beta}} \rangle = \begin{cases} 1, & \alpha \neq \beta \\ 2, & \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\langle \overset{=}{\Psi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}} | \overset{=}{\Psi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}} \rangle = \begin{cases} 1, & \alpha \neq \beta \\ 2, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

(A.24)

Damit die totale Wellenfunktion sowie $\overset{=}{\Phi}$ und $\overset{=}{\Psi}$ richtig normiert sind, muß man $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Psi}$ nachnormieren:

$$\Phi [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{M_{\alpha\beta} M_{T\alpha\beta}} (1,2) := (1 + \delta_{\alpha\beta})^{-1/2} \overset{=}{\Phi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{M_{\alpha\beta} M_{T\alpha\beta}}$$

$$\Psi [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}} (1, \dots, A) := (1 + \delta_{\alpha\beta})^{-1/2} \overset{=}{\Psi} [\alpha\beta] [T\alpha\beta]_{-M_{\alpha\beta}, -M_{T\alpha\beta}} (1, \dots, A).$$

(A.25)

Damit hat man endgültig:

$$\psi^{[0]}(1, \dots, A) = \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \exists \alpha \beta \quad T_{\alpha \beta} \\ M_{\alpha \beta} \quad M_{T_{\alpha \beta}}}} \phi_{M_{\alpha \beta} M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2) \psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A), \quad (\text{A.26})$$

oder

$$\psi^{[0]}(1, \dots, A) = \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \exists \alpha \beta \quad T_{\alpha \beta}}} \hat{\exists}_{\alpha \beta} \hat{T}_{\alpha \beta} \left[\phi_{M_{\alpha \beta} M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2) \otimes \psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A) \right]^{[0][0]} \quad (\text{A.27})$$

Dabei gilt jeweils für die Norm:

$$\langle \psi^{[0]}(1, \dots, A) | \psi^{[0]}(1, \dots, A) \rangle = 1$$

$$\langle \phi_{M_{\alpha \beta} M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2) | \phi_{M_{\alpha \beta} M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(1, 2) \rangle = 1$$

$$\langle \psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A) | \psi_{-M_{\alpha \beta}, -M_{T_{\alpha \beta}}}^{[\exists \alpha \beta][T_{\alpha \beta}]}(3, \dots, A) \rangle = 1$$

für $\alpha, \beta, \exists \alpha \beta, T_{\alpha \beta}, M_{\alpha \beta}, M_{T_{\alpha \beta}}$ beliebig.

(A.28)

Um die Normierung der A-Teilchen-Wellenfunktion $\psi^{(0)}(1, \dots, A)$ sicherzustellen, kann noch gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \exists \beta T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \cap T_{\alpha\beta}}} \langle \phi_{M_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\alpha\beta][T_{\alpha\beta}]}(1,2) \psi_{-M_{\alpha\beta} - M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\alpha\beta][T_{\alpha\beta}]}(3, \dots, A) | \\
 & \quad \times \phi_{M_{\alpha\beta} M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\alpha\beta][T_{\alpha\beta}]}(1,2) \psi_{-M_{\alpha\beta} - M_{T_{\alpha\beta}}}^{[\alpha\beta][T_{\alpha\beta}]}(3, \dots, A) \rangle \\
 & = \sum_{\substack{\alpha \in \beta \\ \exists \beta T_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \cap T_{\alpha\beta}}} 1 = \frac{A(A-1)}{2}.
 \end{aligned}$$

(A.29)

Diese Formel erfolgt ohne Beweis. Für die in Frage kommenden Kerne wurde sie jedoch explizit durch Nachrechnen überprüft.

Anhang B

Berechnung der reduzierten Matrixelemente für Isospin und Drehimpulse

Wir berechnen hier die in Kap.3.1.5 benötigten reduzierten Matrixelemente. Da wir nur für den Anfangszustand antisymmetrisierte Wellenfunktionen verwenden und darauf einen symmetrisierten Hamiltonian wirken lassen, können wir schematisch folgende vier Fälle der Wechselwirkung zwischen einem Pion und zwei Nukleonen unterscheiden:

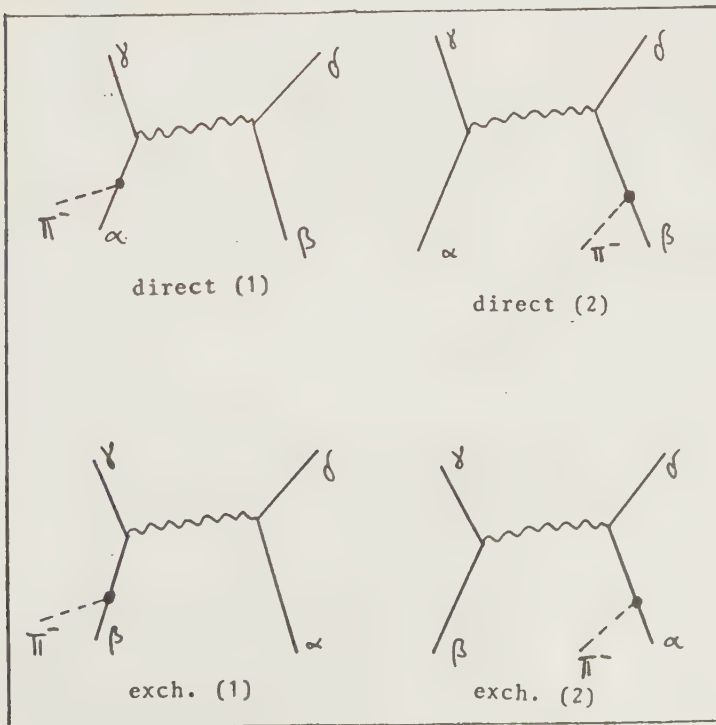


Abb. B.1

Hierbei stehen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die zur Charakterisierung eines Teilchenzustandes nötigen Quantenzahlen. Wir verwenden zur Umkopplung von Isospins und Drehimpulsen das von Danos (Dan 71) eingeführte graphische Verfahren.

B.1 Reduzierte Isospin-Matrixelemente

Für den Isospin ergeben sich aus Abb. B.1 die folgenden vier reduzierten Matrixelemente:

$$m_{t_1} = \text{"direct (1)"}$$

$$m_{t_2} = (-)^{T_{\alpha\beta} + T_{\gamma\delta}} m_{t_1} = \text{"direct (2)"}$$

$$m_{t_3} = (-)^{T_{\alpha\beta} - 1} m_{t_1} = \text{"exch. (1)"}$$

$$m_{t_4} = (-)^{T_{\alpha\beta} - 1} m_{t_2} = \text{"exch. (2)"}$$

(B.1)

Das alleinig benötigte reduzierte Matrixelement

m_{t_1} ergibt sich aus Abb. B.2:

$$\begin{aligned} m_{t_1} &= [T_{\gamma\delta} | \tau^{(1)} | T_{\alpha\beta}] \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & T_{\gamma\delta} \\ 1 & T_{\alpha\beta} & T_{\gamma\delta} \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & T_{\alpha\beta} \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} i\sqrt{6} \frac{\hat{1}}{2} \\ &= (-)^{T_{\gamma\delta} + 1/2} \hat{T}_{\alpha\beta} \hat{T}_{\gamma\delta} \sqrt{6} \left\{ \begin{matrix} T_{\alpha\beta} & 1 & T_{\gamma\delta} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\}. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

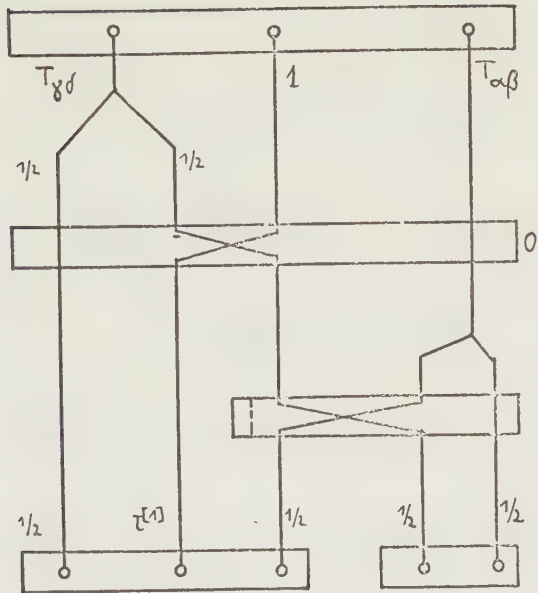


Abb. B.2

B.2 Reduzierte Drehimpuls-Matrixelemente

Hier muß man beachten, daß der Gradientenoperator folgendermaßen wirkt (Dan 71):

$$[R_{Ly}^{[L_y]} | \nabla^{[L]} | R_L^{[L]}] \quad (B.3)$$

$$= (l+1)^{\frac{1}{2}} \langle R_{Ly} | \partial/\partial r - l/r | R_L \rangle, \\ \text{für } L_y := l+1$$

$$[R_{Ly}^{[L_y]} | \nabla^{[L]} | R_L^{[L]}] \quad (B.4)$$

$$= l^{\frac{1}{2}} \langle R_{Ly} | \partial/\partial r + (l+1)/r | R_L \rangle. \\ \text{für } L_y := l-1$$

Es werden die direkten und die Austauschmatrixelemente zuerst für den Fall angegeben, wo der Gradient auf die Pion-Wellenfunktion wirkt; diese reduzierten Matrixelemente sind mit $m_1 \dots m_8$ bezeichnet. Sodann sind sie für den Fall, wo der Gradient auf die Nukleon-Wellenfunktion wirkt, mit $m_9 \dots m_{16}$ bezeichnet. Es zeigt sich, daß man diese Matrixelemente nicht alle einzeln ausrechnen muß, sondern es ergibt sich ein Zusammenhang, der auf der folgenden Seite angegeben ist:

$\nabla_{\pi}:$ $m_{1,2}$

="direct(1)"

$$m_{3,4} = (-)^{\exists \alpha \beta + \exists \gamma \delta - j \alpha - j \beta - j \gamma - j \delta} m_{1,2} \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \gamma \leftrightarrow \delta \end{pmatrix} = \text{"direct(2)"}$$

$$m_{5,6} = (-)^{\exists \alpha \beta - j \alpha - j \beta} m_{1,2} (\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{"exch.(1)"}$$

$$m_{7,8} = (-)^{\exists \alpha \beta - j \alpha - j \beta} m_{3,4} (\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{"exch.(2)"}$$

(B.5)

 $\nabla_N:$ $m_{9,10}$

="direct(1)"

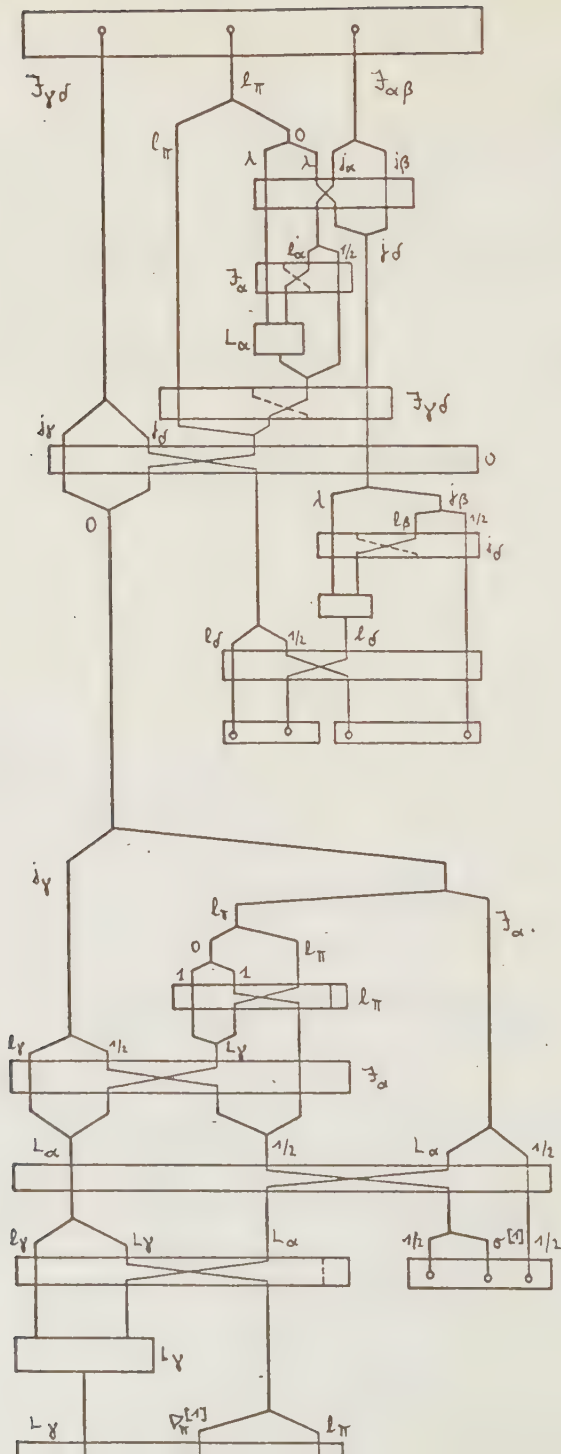
$$m_{1,12} = (-)^{\exists \alpha \beta + \exists \gamma \delta - j \alpha - j \beta - j \gamma - j \delta} m_{9,10} \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \gamma \leftrightarrow \delta \end{pmatrix} = \text{"direct(2)"}$$

$$m_{13,14} = (-)^{\exists \alpha \beta - j \alpha - j \beta} m_{9,10} (\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{"exch.(1)"}$$

$$m_{15,16} = (-)^{\exists \alpha \beta - j \alpha - j \beta} m_{9,10} (\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{"exch.(2)"}$$

(B.6)

Es genügt also, $m_{1,2}$ bzw. $m_{9,10}$ anzugeben und bei den übrigen reduzierten Matrixelementen die Phasen heranzumultiplizieren und die Drehimpulse wie angegeben zu vertauschen. Für $m_{1,2}$ und $m_{9,10}$ ergibt sich aus Abb. B.3,4:



$$m_{12} = \sum_{\substack{\vec{J}_{\alpha\beta} \\ L_{\alpha\beta} \\ L_\gamma}} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ j_\alpha & j_\beta & \vec{J}_{\alpha\beta} \\ \vec{J}_\alpha & j_\delta & \vec{J}_{\alpha\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ l_\alpha & 1/2 & j_\alpha \\ L_\alpha & 1/2 & \vec{J}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\pi & 0 & l_\pi \\ \vec{J}_\alpha & j_\delta & \vec{J}_{\alpha\delta} \\ j_\gamma & j_\delta & \vec{J}_{\gamma\delta} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} j_\gamma & j_\delta & \vec{J}_{\gamma\delta} \\ j_\gamma & j_\delta & \vec{J}_{\gamma\delta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ l_\gamma & 1/2 & j_\gamma \\ l_\delta & 1/2 & j_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\delta & 1/2 & j_\delta \\ l_\delta & 1/2 & j_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ l_\pi & 0 & l_\pi \\ L_\gamma & 1 & l_\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\gamma & 1/2 & j_\gamma \\ L_\gamma & 1 & l_\pi \\ L_\alpha & 1/2 & \vec{J}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_\alpha & 1/2 & \vec{J}_\alpha \\ L_\alpha & 1/2 & \vec{J}_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} l_\gamma & L_\gamma & L_\alpha \\ L_\alpha & 0 & L_\alpha \\ L_\gamma & L_\gamma & 0 \end{bmatrix} (-)^{(\lambda + l_\alpha + L_\alpha + \lambda + l_\beta + l_\delta + l_\gamma + L_\alpha + L_\gamma)/2}$$

$$\times \frac{\hat{\lambda}^2 \hat{L}_\alpha \hat{l}_\alpha \hat{l}_\beta \hat{l}_\gamma \hat{l}_\delta \hat{1}/2 i\sqrt{6}}{(4\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} \lambda & l_\alpha & L_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l_\beta & l_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\gamma & L_\alpha & L_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \langle R_{l_\delta}(r_2) | R_{l_\beta}(r_2) j_\lambda(q_2) \rangle \langle R_{L_\gamma}(r_2) Y^{[L_\gamma]} | \nabla_\pi^{[L_\pi]} | R_{l_\pi} Y^{[L_\pi]} \rangle$$

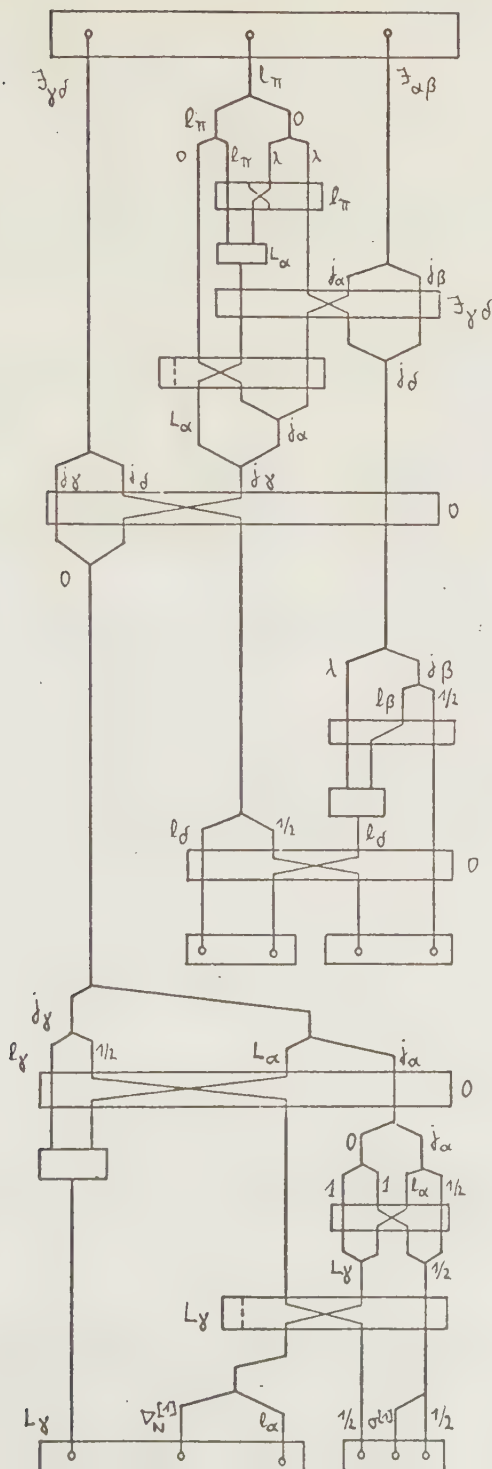
$$= \sum_{\substack{\vec{L}_\alpha \\ \vec{L}_\gamma}} (-)^{\vec{J}_\alpha \cdot \vec{J}_\gamma + \vec{J}_\alpha + \vec{J}_\gamma + L_\pi + (L_\alpha + L_\beta + L_\gamma - L_\delta + L_\gamma)/2 + \gamma/2}$$

$$\times \frac{\sqrt{2}}{(4\pi)^{3/2}} \hat{J}_\alpha^2 \hat{L}_\alpha^2 \hat{J}_\alpha \hat{J}_\beta \hat{J}_\gamma \hat{J}_\delta \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta \hat{L}_\gamma \hat{L}_\delta \hat{\lambda} \hat{J}_{\alpha\beta} \hat{J}_{\gamma\delta} \hat{L}_\gamma$$

$$\times \begin{Bmatrix} \lambda & j_\alpha & J_\alpha \\ J_{\alpha\beta} & j_\delta & j_\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & l_\alpha & L_\alpha \\ \gamma_\pi & J_\alpha & j_\alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_\alpha & j_\gamma & L_\pi \\ J_{\gamma\delta} & J_{\alpha\beta} & j_\delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_\delta & j_\delta & \gamma/2 \\ j_\beta & l_\beta & \lambda \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda & l_\alpha & L_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l_\beta & L_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\gamma & L_\alpha & L_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_\gamma & \gamma/2 & j_\gamma \\ L_\gamma & \gamma & l_\pi \\ L_\alpha & \gamma/2 & J_\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\times \langle R_{L_\delta}(r_1) | R_{L_\beta}(r_2) j_\lambda(q r_1) \times R_{L_\gamma}(r_2) Y^{[L_\gamma]} | \nabla_\pi^{[\gamma]} | R_{L_\pi} Y^{[L_\pi]} \rangle.$$



$$m_{g,0} = \sum_{\substack{L_\alpha \\ L_\gamma}} \begin{bmatrix} l_\pi & 0 & l_\pi \\ \lambda & \lambda & 0 \\ L_\alpha & \lambda & l_\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_\alpha & \lambda & l_\pi \\ j_\alpha & j_\beta & \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} \\ j_\gamma & j_\delta & \tilde{\gamma}_{\gamma\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L_\alpha & j_\alpha & j_\gamma \\ L_\alpha & j_\alpha & j_\gamma \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} j_\gamma & j_\delta & \tilde{\gamma}_{\gamma\delta} \\ j_\gamma & j_\delta & \tilde{\gamma}_{\gamma\delta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ l_\beta & \gamma/2 & j_\beta \\ l_\delta & \gamma/2 & j_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\delta & \gamma/2 & j_\delta \\ l_\delta & \gamma/2 & j_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} l_\gamma & \gamma/2 & j_\gamma \\ L_\alpha & j_\alpha & j_\gamma \\ L_\gamma & L_\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ l_\alpha & \gamma/2 & j_\alpha \\ L_\gamma & \gamma/2 & j_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & \gamma/2 \\ L_\gamma & \gamma/2 & j_\alpha \\ L_\gamma & 0 & L_\gamma \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} L_\gamma & 0 & L_\gamma \\ L_\gamma & 0 & L_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-)^{(l_\pi + \lambda + L_\alpha + \lambda + l_\beta + l_\delta + l_\gamma + L_\alpha + L_\gamma)/2}$$

$$\times \frac{\hat{\lambda} \hat{L}_\alpha \hat{l}_\pi \hat{l}_\beta \hat{l}_\gamma \hat{l}_\delta \gamma^{1/2} i \sqrt{6}}{(4\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} l_\pi & \lambda & L_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l_\beta & l_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\gamma & L_\alpha & L_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \langle R_{l_\delta}(r_2) | R_{l_\beta}(r_2) j_\lambda(q r_2) \rangle \langle R_{L_\gamma}(r_1) Y^{[L_\gamma]} | \nabla_N^{[L]} | R_{L_\alpha}(r_1) Y^{[L_\alpha]} \rangle$$

$$= \sum_{L_\alpha, L_\gamma} (-)^{j_\alpha + j_\gamma + j_\delta + (l_\pi - l_\beta + l_\gamma + l_\delta + L_\gamma)/2 + 1}$$

$$\times \frac{\sqrt{2}}{(4\pi)^{3/2}} \hat{L}_\alpha^2 \hat{j}_\alpha \hat{j}_\beta \hat{j}_\gamma \hat{j}_\delta \hat{l}_\pi \hat{l}_\beta \hat{l}_\gamma \hat{l}_\delta \hat{\lambda} \hat{\Xi}_{\alpha\beta} \hat{\Xi}_{\gamma\delta} \hat{L}_\gamma$$

$$\times \begin{Bmatrix} l_\gamma & m & j_\gamma \\ j_\alpha & L_\alpha & L_\gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_\gamma & m & j_\alpha \\ m & l_\alpha & \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_\delta & j_\delta & m \\ j_\beta & l_\beta & \lambda \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} l_\pi & \lambda & L_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l_\beta & l_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\gamma & L_\alpha & L_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L_\alpha & \lambda & l_\pi \\ j_\alpha & j_\beta & \Xi_{\alpha\beta} \\ j_\gamma & j_\delta & \Xi_{\gamma\delta} \end{matrix} \right\}$$

$$\times \langle R_{l_\delta}(r_1) | R_{l_\beta}(r_2) j_\lambda(q_1) \rangle \langle R_{L_\gamma}(r_1) Y^{[L_\gamma]} | \nabla_N^{[L_\gamma]} | R_{L_\alpha} Y^{[L_\alpha]} \rangle$$

Anhang C

Zurückführen der reduzierten Matricelemente für 1N-Emission auf die reduzierten Matricelemente für 2N-Emission

Wir führen die in Kap. 3.2.4 notwendigen reduzierten Matricelemente für die 1N-Emission auf diejenigen der 2N-Emission zurück.

C.1 Zurückführen der reduzierten Matricelemente

$[\mathcal{F}_F | l_\pi | \mathcal{F}_I]$ auf die reduzierten Matricelemente

$[\mathcal{F}_{\gamma\delta} | l_\pi | \mathcal{F}_{\alpha\beta}]$. Aus der Abb. C.1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{F}_F | l_\pi | \mathcal{F}_I] &= \sum_{\mathcal{F}_{\gamma\delta}} \begin{bmatrix} j_\gamma & 0 & j_\gamma \\ j_\delta & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & \mathcal{F}_B \\ \mathcal{F}_{\gamma\delta} & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & l_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\gamma\delta} & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & l_\pi \\ l_\pi & 0 & l_\pi \\ \mathcal{F}_{\alpha\beta} & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & \mathcal{F}_{\alpha\beta} \\ \mathcal{F}_{\alpha\beta} & \mathcal{F}_{\alpha\beta} & 0 \\ \mathcal{F}_{\alpha\beta} & 0 & \mathcal{F}_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} \\
 &\quad \times [\mathcal{F}_{\gamma\delta} | l_\pi | \mathcal{F}_{\alpha\beta}] \\
 &= \sum_{\mathcal{F}_{\gamma\delta}} (-)^{j_\gamma + j_\delta + \mathcal{F}_{\gamma\delta}} \mathcal{F}_{\gamma\delta} \mathcal{F}_B \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{\gamma\delta} & l_\pi & \mathcal{F}_{\alpha\beta} \\ \mathcal{F}_B & j_\delta & j_\gamma \end{Bmatrix} [\mathcal{F}_{\gamma\delta} | l_\pi | \mathcal{F}_{\alpha\beta}]. \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

C.2 Zurückführen der reduzierten Matricelemente

$[T_F | t_\pi | T_I]$ auf die reduzierten Matricelemente

$[T_{\gamma\delta} | t_\pi | T_{\alpha\beta}]$. Man erhält das in Frage kommende Matricelement sofort aus (C.1), wenn man folgende Ersetzungen vornimmt:

$$\begin{aligned}
 J_I &\rightarrow T_I; & J_F &\rightarrow T_F; & j_\gamma &\rightarrow 1/2; & j_\delta &\rightarrow 1/2; \\
 J_B &\rightarrow T_B; & J_{\alpha\beta} &\rightarrow T_{\alpha\beta}; & J_{\gamma\delta} &\rightarrow T_{\gamma\delta}; & l_\pi &\rightarrow t_\pi.
 \end{aligned}$$

(C.2)

Damit folgt:

$$[\hat{T}_H | t_\pi | T_I] T_I = \sum_{T_{Y\delta}} (-)^{1+T_{Y\delta}} \hat{T}_{Y\delta} \hat{T}_B \hat{T}_{\alpha\beta}^{-1} \left\{ \begin{matrix} T_{Y\delta} & t_\pi & T_{\alpha\beta} \\ T_B & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\} [T_{Y\delta} | t_\pi | T_{\alpha\beta}]. \quad (C.3)$$

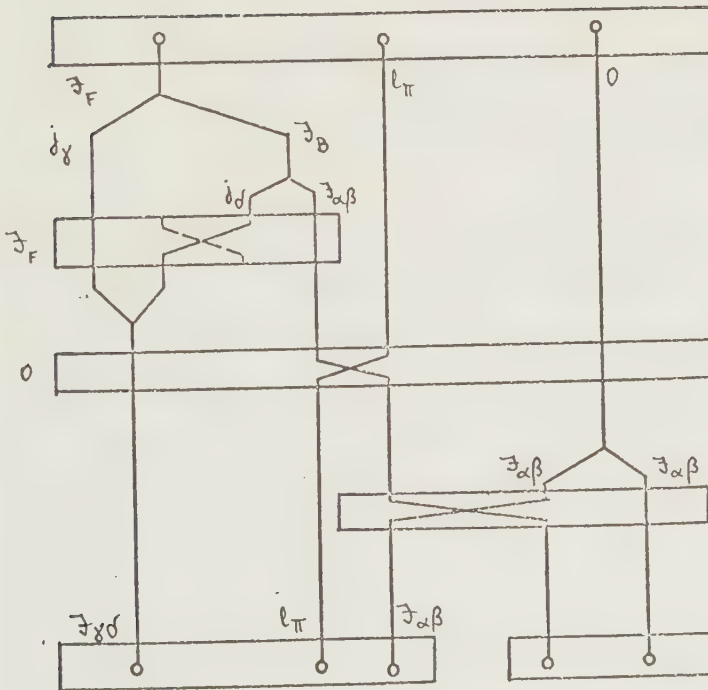


Abb. C.1

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. M. G. Huber, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche klärende und weiterführende Diskussionen.

Die freundliche Unterstützung der Herren Dr. M. Dillig, Dr. J. Richter und Dipl. Phys. L. Trautmann wird dankbar anerkannt.

Weiterhin soll die geduldige Hilfe von Frl. R. Miehe bei der Abfassung des Manuskriptes nicht unerwähnt bleiben.

Schließlich danke ich den Herren Professor Dr. G. Backenstoß und Prof. Dr. H. Ullrich für die Gastfreundschaft während mehrerer Aufenthalte am europäischen Kernforschungszentrum CERN in Genf.

Lebenslauf

Name: Werner Schneider

Geburtstag und -ort: 12. 2. 1948, Forchheim

Eltern: Alois Schneider
Anni Schneider, geb. Brütting

Schulen: 1. bis 4. Klasse Volksschule,
Forchheim
5. bis 13. Klasse math.-nat.
Gymnasium, Forchheim
Abitur: 20. Juli 1967

Studium: 1967 bis 1972 Studium der
Physik an der Friedrich-Alex-
xander-Universität Erlangen-
Nürnberg
Seit 1972 wissenschaftlicher
Angestellter am Institut für
Theoretische Physik III der
Universität, Erlangen

Prüfungen: Vordiplom: 3. November 1969
Diplom: 3. November 1972

